

Bachelorarbeit

**Klassifikation quaternionischer
Möbiustransformationen**

Julius Plenz

8. Februar 2013

Erstgutachter: Univ.-Prof. Dr. Alexander Schmitt
Zweitgutachter: Univ.-Prof. Dr. Ehrhard Behrends

Eigenständigkeitserklärung: Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Berlin, den 8. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

1. Komplexe Möbiustransformationen	1
1.1. Möbiustransformationen, $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ und die projektive Gerade $\mathbb{P}_1^{\mathbb{C}}$	1
1.2. Klassifikation von komplexen Möbiustransformationen	4
1.3. Visualisierung der Dynamik	9
2. Quaternionen	11
3. Quaternionische Möbiustransformationen	12
3.1. Konstruktion von $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$, $\text{PU}(1,1; \mathbb{H})$ und dessen Wirkung	13
3.2. Einfache und zusammengesetzte quaternionische Möbiustransformationen	16
3.3. Die Aufteilung in <i>elliptisch</i> , <i>parabolisch</i> und <i>loxodromisch</i>	18
3.4. Fixpunkte und Eigenwerte	20
3.4.1. Der Fall $b = c = 0$	21
3.4.2. Der Fall $b = \bar{c} \neq 0$	22
3.4.3. Der Fall $b \neq \bar{c} \neq 0$	23
A. Visualisierung invarianter Punktmenen unter Möbiustransformationen	31
Literatur	32

Abbildungsverzeichnis

1.1. Invariante Punktmenen einer loxodromischen Möbiustransformation mit Fixpunkten ± 1 , die konjugiert zu $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda = 1.6e^{i\pi/6}$ ist.	10
1.2. Invariante Punktmenen einer loxodromischen Möbiustransformation mit Fixpunkten $\pm(1 - i/2)$, die konjugiert zu $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda = 1.2e^{i\pi/6}$ ist.	10

Listings

1. Perl-Programm <code>plot/invariant.pl</code>	31
---	----

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Klassifikation quaternionischer Möbiustransformationen. Der erste Abschnitt liefert zunächst das klassische Resultat der Klassifikation komplexer Möbiustransformationen anhand ihrer Spur und enthält Visualisierungen invarianter Punktmenge.

Abchnitt zwei führt die Divisionsalgebra der Quaternionen ein und erläutert, welche Eigenschaften komplexer Zahlen auf Quaternionen übertragbar sind. Der dritte Abschnitt definiert schließlich Möbiustransformationen in den Quaternionen und versucht, diese zu klassifizieren. Die Resultate sind dabei nicht so elementar wie im komplexen Fall; die Klassifikation erfolgt daher nach einer Fallunterscheidung dediziert für jeden Fall.

1. Komplexe Möbiustransformationen

1.1. Möbiustransformationen, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ und die projektive Gerade $\mathbb{P}_1^{\mathbb{C}}$

Definition 1.1 (Einpunktkompaktifizierung der komplexen Ebene). Durch Hinzufügen eines Punktes ∞ kann die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} zu $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fortgesetzt und mit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ identifiziert werden [8, S. 17f.]. Es gelten die üblichen Rechenregeln:

- i) $\forall x \in \mathbb{C} : x + \infty = \infty$
- ii) $\forall x \in \mathbb{C}, x \neq 0 : x \cdot \infty = \infty$
- iii) $\forall x \in \mathbb{C} : \frac{x}{\infty} = 0$
- iv) $\forall x \in \mathbb{C}, x \neq 0 : \frac{x}{0} = \infty$

Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$ und $\infty \pm \infty$ sind nicht definiert.

Definition 1.2 (Möbiustransformation). Eine *Möbiustransformation* ist eine Abbildung der Form

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit Koeffizienten } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } ad - bc \neq 0.$$

Die Menge der Möbiustransformationen wird mit

$$\mathcal{M} := \left\{ f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid f \text{ ist Möbiustransformation} \right\}$$

bezeichnet.

Satz 1.1. Die Menge \mathcal{M} der Möbiustransformationen bildet eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung \circ . Speziell kann man diese Gruppe mit der projektiven Gruppe komplexer 2×2 -Matrizen, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, identifizieren: $(\mathcal{M}, \circ) \cong (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$

Beweis. **Schritt 1:** (\mathcal{M}, \circ) ist eine Gruppe. Dafür prüfen wir die drei Eigenschaften:

- i) Das neutrale Element ist trivialerweise $z \mapsto z$.
- ii) Abgeschlossenheit: Gegeben zwei Möbiustransformationen f und g mit

$$f : z \mapsto \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{und} \quad g : z \mapsto \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

gilt für $z \in \hat{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(z) &= \frac{a_2 \left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \right) + b_2}{c_2 \left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \right) + d_2} = \frac{a_2(a_1 z + b_1) + b_2(c_1 z + d_1)}{c_2(a_1 z + b_1) + d_2(c_1 z + d_1)} \\ &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)} \end{aligned}$$

$(g \circ f)(z)$ hat offensichtlich die Form einer Möbiustransformation – dass die Koeffizienten allerdings auch die Ungleichung $ad - bc \neq 0$ erfüllen, ist algebraisch zunächst nicht offensichtlich. Wir kümmern uns in Kürze darum.

- iii) Zu einer Möbiustransformation $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ist das Inverse gegeben durch $g : z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$. Das ergibt die obige Formel für die Hintereinanderschaltung durch Einsetzen der jeweiligen Koeffizienten von f und g :

$$(g \circ f)(z) = \frac{(ad - bc)z + (-cb + bc)}{(-ca + ac)z + (-cb + ad)} = z$$

Schritt 2: Es gibt einen Gruppenisomorphismus $(\mathcal{M}, \circ) \cong (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$. Dafür betrachten wir zunächst, dass die Koeffizienten a, b, c, d einer Möbiustransformation auf Grund der Bedingung $ad - bc \neq 0$ auch als Koeffizienten einer Matrix M aus

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid \det(A) = ad - bc \neq 0 \right\},$$

der Gruppe invertierbarer, komplexer 2×2 -Matrizen, aufgefasst werden können. Die Abbildung

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

ist offensichtlich surjektiv. Die Koeffizienten der Multiplikation zweier Matrizen mit den üblichen Rechenregeln –

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$$

– stimmen genau mit den Koeffizienten der Hintereinanderschaltung zweier Möbiustransformationen aus Schritt eins überein, also ist dies ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Für die Determinantenabbildung in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$, und somit ist das Abgeschlossenheitsargument aus Schritt eins vollständig.

Multipliziert man die Koeffizienten einer Möbiustransformation mit einem Skalar $k \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$, dann ändert dies die Möbiustransformation nicht:

$$\frac{kaz + kb}{kcz + kd} = \frac{k(az + b)}{k(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}$$

Der Kern des obigen Gruppenhomomorphismus ist also genau \mathbb{C}^* . Insgesamt ergibt sich $\mathcal{M} \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ als Gruppe. \square

Der Praxis halber notieren wir Möbiustransformationen in Zukunft häufig auch als Matrix mit Determinante 1. Diese Darstellung ist nicht immer ganz intuitiv (und bis auf Multiplikation mit $\pm I$ nicht eindeutig), wie folgende Beispiele zeigen:

Beispiel. i) Die Identität $z \mapsto z$ wird durch die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

ii) Die *Involution* an der 1-Sphäre, $\mathrm{inv} : z \mapsto \frac{1}{z}$, wird durch die Matrix $A_{\mathrm{inv}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben: $\frac{i}{iz} = \frac{1}{z}$. Alternativ könnte man $-A_{\mathrm{inv}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ schreiben, doch dies sind nur zwei verschiedene Repräsentanten des gleichen Elements aus $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. In beiden Fällen gilt: $\det(A_{\mathrm{inv}}) = \det(-A_{\mathrm{inv}}) = 1$. Der naive Ansatz des „Koeffizienten-Zurücktragens“ aus dem Term der Möbiustransformation ergibt allerdings nicht immer ein Element aus $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat Determinante -1 .

Definition 1.3 (Die komplex-projektive Gerade und homogene Koordinaten). Ein Modell für $\hat{\mathbb{C}}$ ist die *komplex-projektive Gerade* $\mathbb{P}_1^{\mathbb{C}}$, die wie folgt konstruiert wird:

$$\mathbb{C}^2 - \{0\} / \sim \quad \text{mit der Äquivalenz-Relation} \quad \mathbf{w} \sim \mathbf{z} : \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \mathbf{w} = \lambda \mathbf{z}.$$

Die Äquivalenzklassen $[z_1, z_2]$ werden *homogene Koordinaten* genannt. Für $z_2 \neq 0$ gilt $[z_1, z_2] = [z_1/z_2, 1]$. Der Punkt ∞ entspricht $[1, 0]$. Die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} ist auf ganz natürliche Weise in $\mathbb{P}_1^{\mathbb{C}}$ enthalten vermöge $z \mapsto [z, 1]$. Die Koordinate $[0, 0]$ ist nicht zugelassen.

Bemerkung. Eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ wirkt linear auf \mathbb{C}^2 :

$$A\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}$$

Betrachtet man die Äquivalenzklasse $[Az] \in \mathbb{P}_1^{\mathbb{C}}$, entspricht diese genau einer Möbiustransformation mit Parameter $z = z_1 z_2^{-1}$ in $\hat{\mathbb{C}}$:

$$\begin{bmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (az_1 + bz_2)/(cz_1 + dz_2) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (az + b)/(cz + d) \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Im Falle $z_2 = 0$ entspricht $z = \infty$; falls $cz_1 + dz_2 = 0$, dann entsprechen die homogenen Koordinaten genau $[1, 0] = \infty$.)

Die lineare Wirkung von $GL_2(\mathbb{C})$ induziert also für $z = z_1 z_2^{-1}$ die gebrochen-rationalen Terme, die eine Möbiustransformation ausmachen. Anders ausgedrückt: Möbiustransformationen sind nichts anderes als lineare Transformationen homogener Koordinaten. Der Vorteil der homogenen Koordinaten ist, dass dem Punkt ∞ nun keine Sonderrolle mehr zukommt, und man damit „normal“ rechnen kann.

Wir haben nun Zugang zu Methoden der linearen Algebra, um die Dynamik von Möbiustransformationen zu untersuchen. Ein wichtiges Resultat ist das folgende:

Satz 1.2. Sei $f_M \in \mathcal{M}$ eine Möbiustransformation mit Repräsentant $M \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Dann gilt: $z = z_1 z_2^{-1}$ ist genau dann Fixpunkt von f_M , wenn (z_1, z_2) Eigenvektor von M ist.

Beweis. Sei $z = z_1 z_2^{-1}$ mit $f_M(z) = z$ ein Fixpunkt. Sei $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert λ , genüge also der Gleichung $M\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. In homogenen Koordinaten ist $[\lambda\mathbf{z}] = [\mathbf{z}]$.

Der oben dargestellte Zusammenhang zwischen Möbiustransformationen und linearen Abbildungen auf homogenen Koordinaten liefert sofort: $[M\mathbf{z}] = [\mathbf{z}] \iff f_M(z) = z$. \square

Bemerkung. Der Fixpunkt ∞ ist nun nichts anderes als ein Eigenwert der Form $[z_1, 0]$. Somit sieht man direkt, dass ∞ nur dann Fixpunkt von f_M sein kann, wenn $c = 0$ ist. Dann entspricht aber $f_M(z) = \frac{az+b}{d}$ nur einer Ähnlichkeitsabbildung, also einer Streckung und Translation in der komplexen Ebene.

1.2. Klassifikation von komplexen Möbiustransformationen

Es ist generell wünschenswert, Möbiustransformationen anhand algebraischer oder dynamischer Eigenschaften zu klassifizieren. Diese Klassifikation sollte invariant unter Konjugation sein, also \mathcal{M} in Konjugationsklassen aufteilen. Im Folgenden sei eine Möbiustransformation als nicht trivial vorausgesetzt, also nicht die Identitätsabbildung $z \mapsto z$.

Definition 1.4. Sei $M \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ mit Eigenwerten λ_1, λ_2 .

- i) M heißt *parabolisch* $\iff \lambda_i = \pm 1$
- ii) M heißt *elliptisch* $\iff |\lambda_i| = 1, \lambda \neq \pm 1$
- iii) M heißt *loxodromisch* $\iff |\lambda_i| \neq 1$

Bemerkung. Diese Klassifikation ist invariant unter Konjugation, weil die Eigenwerte es sind: Seien $G, H \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$, G mit Eigenwert λ . Dann:

$$HGH^{-1}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z} \iff GH^{-1}\mathbf{z} = H^{-1}\lambda\mathbf{z} = \lambda H^{-1}\mathbf{z} \stackrel{z' = H^{-1}z}{\iff} G\mathbf{z}' = \lambda\mathbf{z}'$$

Also ist λ Eigenwert von G genau dann, wenn λ Eigenwert von HGH^{-1} ist.

Wir können nun „Prototypen“ von Möbiustransformationen angeben, also jeweils die einfachste Form einer Möbiustransformation, die eine der Eigenschaften parabolisch, elliptisch bzw. loxodromisch aufweist. Dies wird uns einen anschaulichen Zugang zur Klassifikation liefern.

Beispiel. i) Die einfachste Form parabolischer Möbiustransformationen sind *Translationen*, also Abbildungen $f : z \mapsto z + a$ für ein $a \in \mathbb{C}$. Eine solche Translation kann durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

ii) Ein Beispiel für elliptische Möbiustransformationen sind *Drehspiegelungen* in der komplexen Ebene, also Abbildungen der Form $z \mapsto \lambda z$ oder $z \mapsto \lambda z^{-1}$ mit $\lambda = e^{\varphi i}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ bzw. $|\lambda| = 1$.

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich für die *Inversion* $z \mapsto z^{-1}$. Die entsprechende Matrix $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_i = \pm i$, somit ist die Inversion eine elliptische Möbiustransformation.

iii) Im einfachsten Falle sind loxodromische Möbiustransformationen *Drehstreckungen* in der Ebene, also Abbildungen der Form $f : z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| \neq 1$. So ist z. B. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1/2} \end{pmatrix}$ eine Streckung um den Faktor 2, weil $\frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1/2}} = 2z$. Die Spezialfälle, in denen loxodromische Möbiustransformationen lediglich eine Streckung (bzw. Stauchung) darstellen, werden teilweise auch als eigene Klasse, die sogenannten *hyperbolischen Möbiustransformationen*, bezeichnet (z. B. in [10, S. 177]).

Wir können jetzt die Dynamik und Fixpunkte von Möbiustransformationen untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst Abbildungen, mit denen wir die Fixpunkte einer Möbiustransformation „kanonisieren“, d. h. auf 0 und ∞ abbilden können.

Satz 1.3 (Fixpunkte einer Möbiustransformation). *Eine Möbiustransformation $f \neq \text{id}$ hat entweder einen oder zwei Fixpunkte, und diese liegen für eine Wahl der Wurzel $\sqrt{\cdot}$ bei*

$$\xi_{\pm} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4c}}{2c}. \quad (1.1)$$

Beweis. Zunächst ein Wort zur Existenz der Fixpunkte: Die Fixpunktgleichung $z = \frac{az+b}{cz+d}$ kann aufgelöst werden zu einer quadratischen Gleichung $z(cz+d) = az+b$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat diese Gleichung in \mathbb{C} eine oder zwei Nullstellen.

Im Falle $c = 0$ hat die Gleichung offensichtlich den Fixpunkt ∞ . Ist außerdem $a \neq d$, dann ist $\frac{b}{d-a}$ ein weiterer Fixpunkt.

Für $c \neq 0$ eignet sich zur expliziten Berechnung die in Satz 1.2 formulierte Äquivalenz von Fixpunkten und Eigenwerten: Die Eigenvektoren \mathbf{z}_{\pm} einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ sind gegeben durch

$$\mathbf{z}_{\pm} = \left(\frac{(a-d) \pm \sqrt{a^2 + 4bc - 2ad + d^2}}{2c}, 1 \right)$$

Einsetzen der Relation $ad - bc = 1$ liefert die gewünschte Formel. \square

Korollar (Möbiustransformationen mit genau einem Fixpunkt sind konjugiert zu Translationen). *Hat eine Möbiustransformation nur genau einen Fixpunkt, dann ist entweder $c = 0$ und $a = d = \pm 1$, und es handelt sich um eine Translation $z \mapsto z + b$, $b \neq 0$ (der Fixpunkt ist also ∞); oder aber es gilt $c \neq 0$ und $(a+d)^2 = 4$, dann handelt es sich um eine parabolische Möbiustransformation, also um eine zu einer Translation konjugierte Abbildung.*

Beweis. Nur der zweite Teil muss bewiesen werden.¹ Sei $\hat{T} \in \mathcal{M}$ mit $c \neq 0$, $(a+d)^2 = 4$ und Fixpunkt ξ . Wir suchen ein $G \in \mathcal{M}$, so dass $T := G\hat{T}G^{-1}$ die Form $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat, also eine Translation um x . Dieses G muss den Fixpunkt ξ auf ∞ abbilden, so dass die Hintereinanderschaltung nur den Fixpunkt ∞ hat und somit eine Translation ist:

$$\infty \xrightarrow{G^{-1}} \xi \xrightarrow{\hat{T}} \xi \xrightarrow{G} \infty$$

Wir wählen:

$$f_G(z) = \frac{1}{z - \xi} \quad \text{bzw.} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -i\xi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} -i\xi & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Für ein allgemeines $\hat{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned} T = G\hat{T}G^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -i\xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i\xi & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -i\xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -ai\xi - bi & -ai \\ -ci\xi - di & -ci \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\xi + d & c \\ a\xi + b - c\xi^2 - d\xi & a - c\xi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹Streng genommen ist dieses Resultat ein Spezialfall des Satzes 1.5, da die Spur invariant unter Konjugation ist. Es ist aber doch hilfreich, sich die Zusammenhänge einmal exemplarisch vor Augen zu führen.

Einsetzen des Fixpunktes $\xi = \frac{a-d}{2c}$ liefert die Gleichung: $c\xi + d = a - c\xi = \frac{1}{2}(a+d)$, und somit sind $T_{1,1} = T_{2,2} = \pm 1$ genau dann, wenn $\frac{1}{2}(a+d)$ es ist.

Bleibt noch zu zeigen, dass $T_{2,1} = 0$ genau dann, wenn $(a+d)^2 = 4$. Das lässt sich direkt nachrechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= a\xi + b - c\xi^2 - d\xi = \frac{1}{2c} \left(a^2 - ad - \frac{1}{2}(a-d)^2 - da + d^2 \right) + b \\ &= \frac{1}{4c}(a-d)^2 + b = (a-d)^2 + 4bc \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + 4bc = a^2 + 2ad + d^2 - 4 = (a+d)^2 - 4 \end{aligned}$$

Also handelt es sich bei T um eine Translation $z \mapsto z + c$. □

Korollar. Eine Möbiustransformation $M \in \mathcal{M}$ mit zwei Fixpunkten ist konjugiert zu einer Möbiustransformation $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Die korrespondierende Matrix ist in Diagonalform.

Beweis. Habe M die Fixpunkte ξ_{\pm} . Analog zum vorigen Korollar definieren wir $G(z) = \frac{z-\xi_+}{z-\xi_-}$, so dass gilt:

$$\infty \xrightarrow{G^{-1}} \xi_- \xrightarrow{M} \xi_- \xrightarrow{G} \infty \quad \text{und} \quad 0 \xrightarrow{G^{-1}} \xi_+ \xrightarrow{M} \xi_+ \xrightarrow{G} 0$$

Somit kann $\widetilde{M} := GMG^{-1}$ nur eine Drehstreckung der komplexen Ebene sein, hat also die Form $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Als Element von $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ betrachtet, hat \widetilde{M} für eine Wahl von $\sqrt{\cdot}$ die Form:

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

□

Beispiel. Die Inversion $z \mapsto z^{-1}$ ist konjugiert zu $z \mapsto -z$, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Bemerkung.

- i) Bezüglich der Zuordnung $\xi_+ \mapsto 0$ und $\xi_- \mapsto \infty$ ist λ eindeutig. Bei einer Vertauschung der Zuordnung ändert sich $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}$. Anschaulich bedeutet dies eine Drehung in entgegengesetzter Richtung um den anderen Fixpunkt.
- ii) Im Falle einer loxodromischen Möbiustransformation gibt es einen *anziehenden* und einen *abstoßenden* Fixpunkt. Wird ξ_+ auf 0 abgebildet, so wird ξ_+ bei einer Drehstreckung $z \mapsto \lambda z$ für $|\lambda| < 1$ zu einem anziehenden, im Falle $|\lambda| > 1$ zu einem abstoßenden Fixpunkt.

Lemma 1.4. Die Abbildung Tr^2 einer Möbiustransformation M ist invariant unter Konjugation.

Beweis. Wie aus der linearen Algebra bekannt, gilt $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Somit ist $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(G^{-1} \cdot GM) = \text{Tr}(GMG^{-1})$. Um eine Fallunterscheidung zu sparen, betrachten wir nur das Quadrat der Spur: Denn für zwei Repräsentanten $M = -M \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ist $\text{Tr}(-M) = -\text{Tr}(M)$. \square

Satz 1.5 (Klassifikation komplexer Möbiustransformationen). Eine Möbiustransformation $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird eindeutig durch $\text{Tr}^2 M = (a+d)^2$ charakterisiert:

- i) M parabolisch $\iff (a+d)^2 = 4$
- ii) M elliptisch $\iff a+d$ reell mit $(a+d)^2 < 4$
- iii) M loxodromisch $\iff a+d$ nicht reell oder $(a+d)^2 > 4$

Beweis. Die Rückrichtung von i) wurde im Korollar auf S. 6 bewiesen. Die Hinrichtung folgt aus der oberen Dreiecksgestalt der Matrix mit Eigenwerten ± 1 .

Sei $\lambda \in \mathbb{C}^*$, so dass $z \mapsto \lambda z$ konjugiert zu M ist. Wegen Lemma 1.4 ist $(a+d)^2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 =: c_\lambda$. Mit Polarkoordinaten kann man c_λ darstellen als $c_\lambda = re^{i\varphi} + r^{-1}e^{-i\varphi} + 2$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Für den Imaginär- und Realteil von c_λ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Im}(c_\lambda) &= r \text{Im}(e^{i\varphi}) + \frac{1}{r} \text{Im}(e^{-i\varphi}) = \sin(\varphi) \left(r - \frac{1}{r} \right) \\ \text{Re}(c_\lambda) &= r \text{Re}(e^{i\varphi}) + \frac{1}{r} \text{Re}(e^{-i\varphi}) + 2 = \cos(\varphi) \left(r + \frac{1}{r} \right) + 2 \end{aligned}$$

Fall 1: $r = 1$. Dann ist $\text{Im}(c_\lambda) = 0$. Für alle $\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ist $\text{Re}(c_\lambda) < 4$, und weil für $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ die Möbiustransformation die Identität wäre, ist dieser Fall ausgeschlossen. Somit gilt $r = 1 \iff M$ elliptisch.

Fall 2: $r \neq 1$. Dann ist $\text{Im}(c_\lambda) = 0$ nur dann, wenn $\varphi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $(a+d)$ kann nur reell sein, wenn $(a+d)^2 = c_\lambda \geq 0$. Wenn $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ist, dann ist $c_\lambda > 4$. (Dies ist der Spezialfall, wo M konjugiert zu einer Streckung ist, also eine hyperbolische Möbiustransformation ist.) Sonst ist $c_\lambda < 0$ oder nicht-reell und es handelt sich um eine loxodromische Möbiustransformation. \square

Überraschenderweise gelingt die Klassifikation von Möbiustransformationen lediglich anhand der Koeffizienten a und d . Ist $(a+d)^2 = 4$, dann hat die Möbiustransformation nur einen Fixpunkt; sonst hat sie zwei Fixpunkte, und die Fixpunkte können mit einer geschlossenen Formel anhand von a, b und c bestimmt werden.

1.3. Visualisierung der Dynamik

Auch die Dynamik der Möbiustransformation lässt sich mit Hilfe der Fixpunkte und Konjugationsklassen nun nachvollziehen: Eine elliptische Möbiustransformation lässt Kreise um die beiden Fixpunkte invariant; eine loxodromische Möbiustransformation lässt spiralförmige, vom einen Fixpunkt zum anderen laufende Punktfolgen invariant. Diese Dynamik bedarf einer genaueren Betrachtung und Visualisierung.

Im Falle einer loxodromischen Möbiustransformation $f(z) = \lambda z$ mit Fixpunkten 0 und ∞ ist eine invariante Punktmenge L_θ einfach eine sog. *logarithmische Spirale* mit „Startwinkel“ θ :

$$L_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \lambda^t e^{i\theta}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Für ein $z \in L_\theta$ liegt $f(z) = \lambda z = \lambda^{t+1} e^{i\theta}$ auch wieder in L_θ .

Diese Menge können wir nun transformieren, so dass die Spirale vom einen Fixpunkt ξ_+ zum anderen Fixpunkt ξ_- läuft. Sei g eine Möbiustransformation, so dass $gfg^{-1}(z) = \lambda z =: \tilde{f}$. Gegeben λ und die Fixpunkte, so können wir $f = g^{-1}\tilde{f}g$ berechnen. Wie wir gesehen haben ist $\tilde{f}(L_\theta) = L_\theta$, und somit gilt $f(g^{-1}(L_\theta)) = g^{-1}\tilde{f}gg^{-1}(L_\theta) = g^{-1}\tilde{f}(L_\theta) = g^{-1}(L_\theta)$. Also ist eine unter f invariante Punktmenge genau $g^{-1}(L_\theta)$.

Explizit berechnet sich g^{-1} zu:

$$g(z) = \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-} \Rightarrow g^{-1}(z) = \frac{\xi_- z - \xi_+}{z - 1}$$

Die beiden Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen jeweils eine Familie von 16 logarithmischen Kurven L_{θ_k} , $\theta_k = \frac{k\pi}{8}$, $k = 0, \dots, 15$, transformiert auf die Fixpunkte $\xi_\pm^1 = \pm 1$ und $\xi_\pm^2 = \pm(1 - i/2)$ mit zwei unterschiedlichen Lambdas. Für Details zur Erzeugung der Graphen siehe das Code-Listing 1 im Anhang A auf S. 31.

Für weitere Illustrationen und einen anschaulichen Zugang siehe [10], besonders S. 177 sowie den gesamten Abschnitt 3.7 ab S. 188. Einen nicht sehr rigorosen, dafür aber auch für Nicht-Mathematiker geeigneten Ansatz bietet [9].

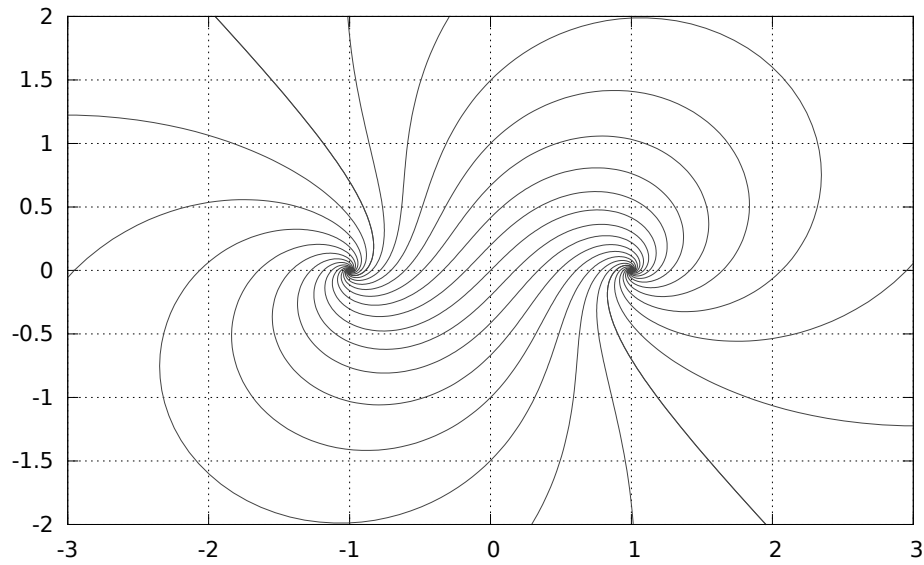


Abb. 1.1: Invariante Punktmenigen einer loxodromischen Möbiustransformation mit Fixpunkten ± 1 , die konjugiert zu $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda = 1.6e^{i\pi/6}$ ist.

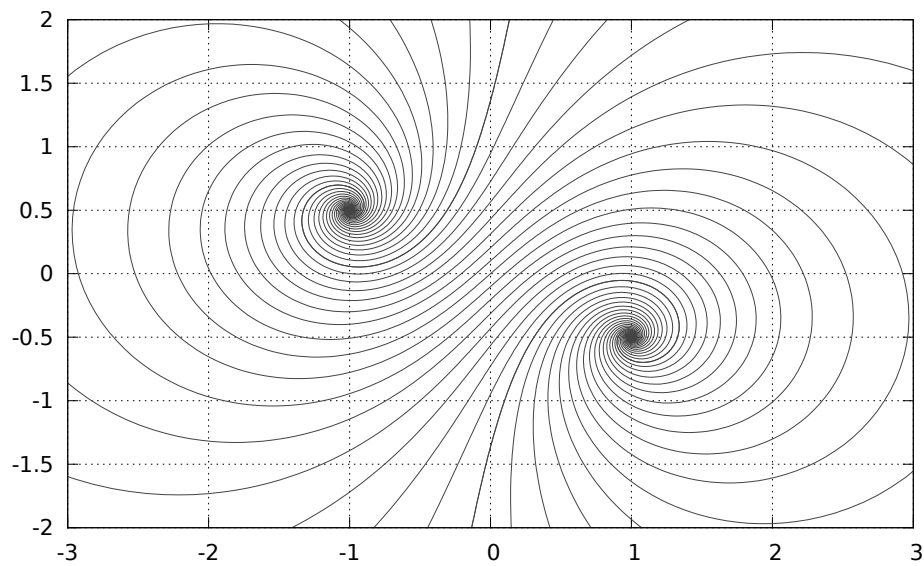


Abb. 1.2: Invariante Punktmenigen einer loxodromischen Möbiustransformation mit Fixpunkten $\pm(1 - i/2)$, die konjugiert zu $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda = 1.2e^{i\pi/6}$ ist.

2. Quaternionen

Die Betrachtung aus dem vorigen Abschnitt wollen wir nun in höheren Dimensionen verallgemeinern. Dazu betrachten wir den Raum der *Quaternionen* \mathbb{H} .

Definition 2.1. Der Raum \mathbb{H} der (*hamiltonschen*) *Quaternionen* ist der \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^4 mit folgender Benennung der Basen

$$1 = e_1 = (1,0,0,0), \quad \mathbf{i} := e_2 = (0,1,0,0), \quad \mathbf{j} := e_3 = (0,0,1,0), \quad \mathbf{k} := e_4 = (0,0,0,1)$$

mit einer Multiplikationsabbildung $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, die definiert ist durch

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \quad \text{und} \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}.$$

Eine Quaternion $x \in \mathbb{H}$ wird statt in Vektorschreibweise häufig als Term bezüglich dieser Basen mit reellen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dargestellt: $x = \alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k}$.

Bemerkung. \mathbb{H} ist eine assoziative Divisionsalgebra. Doch schon anhand der Definition erkennt man, dass \mathbb{H} nicht kommutativ sein kann. Tatsächlich ist das Zentrum von \mathbb{H} genau $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$, so dass $ab = ba$ genau dann gilt, wenn $a \in \mathbb{R}$ oder $b \in \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung (Rechenregeln). Herleitungen für die Rechenregeln finden sich in [3, S. 159ff].

- i) Das Skalarprodukt zweier Quaternionen $x = \alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ und $y = \alpha' + \beta'\mathbf{i} + \gamma'\mathbf{j} + \delta'\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ ist $\langle x, y \rangle := \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' \in \mathbb{R}$. Die dadurch induzierte Norm stimmt mit der euklidischen Norm überein: $|x|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$.
- ii) Das zu $x = \alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ konjugierte Element ist $\bar{x} = \alpha - \beta\mathbf{i} - \gamma\mathbf{j} - \delta\mathbf{k}$. Es gelten die aus der Rechnung mit komplexen Zahlen bekannten Rechenregeln $|\bar{x}| = |x|$ und $\overline{\bar{x}} = x$. Häufig gebraucht wird die Multiplikationsregel $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$. Wie im Komplexen auch gilt $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$, und somit speziell die Formel für die Inversenberechnung: $x^{-1} = |x|^{-2}\bar{x}$, $x \neq 0$.
- iii) Der Real- und Imaginärteil sind definiert als $\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ und $\operatorname{Im}(x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})$.
- iv) Für zwei Quaternionen x und $y \neq 0$ gilt: $\operatorname{Re}(yxy^{-1}) = \operatorname{Re}(x)$ und $|yxy^{-1}| = |x|$. Die zwei Quaternionen x und y heißen *ähnlich*, wenn $q \neq 0$ existiert, so dass $qyq^{-1} = x$. Überdies kann man q normieren, so dass man zwei ähnliche Quaternionen durch Konjugation mit einer *Einheitsquaternion* ineinander überführen kann. Durch fleißiges Rechnen lässt sich zeigen, dass x und y genau dann ähnlich sind, wenn $\operatorname{Re}(x) = \operatorname{Re}(y)$ und $|x| = |y|$ ist.²

Bemerkung („Merkwürdigkeiten“). Die Definitionen von Skalarprodukt, Konjugation sowie Real- und Imaginärteil lassen vermuten, dass es sich bei \mathbb{H} um ein „reell-vierdimensionales \mathbb{C} “ handelt. Der Körper \mathbb{C} liegt auf natürliche Weise in \mathbb{H} , doch Gleichungen und Rechnungen lassen sich in \mathbb{H} nicht so einfach handhaben. Einige ungewohnte Konsequenzen der Nichtkommutativität:

²Leider steht diese Behauptung ohne einen Beweis in der von [2] zitierten Quelle (hier: [5]). In [1, S. 333] finden sich viele hilfreiche Lemmata und eine Beweisskizze.

- i) Die Notation $\frac{a}{b}$ sowie die Formulierung „Division durch b “ ist für nicht-reelle b nicht wohldefiniert; statt dessen muss explizit ab^{-1} oder $b^{-1}a$ geschrieben werden, und i. A. gilt $ab^{-1} \neq b^{-1}a$. Auch muss man bei Gleichungsumformungen explizit von „Multiplikation auf der linken (bzw. rechten) Seite“ sprechen.
- ii) Die Konstruktion des Polynomringes $\mathbb{H}[X]$ ist etwas subtil³: Ein Element aus $\mathbb{H}[X]$ ist die formale (endliche) Summe von Monomen der Form $a_1X^{n_1}a_2X^{n_2} \cdots a_rX^{n_r}a_{r+1}$, wobei $n = \sum_{i=1}^r n_i$ der Grad des Monomes ist. Aufgrund der fehlenden Kommutativität können zwei Monome vom Grad n im Allgemeinen nicht zusammengefasst werden (so ist zum Beispiel schon $\mathbf{i}X \neq X\mathbf{i}$). Der Fundamentalsatz der Algebra gilt nur in abgewandelter Form: Ein Polynom hat eine Nullstelle, wenn sein Grad $n \geq 1$ ist und nur *ein* Monom vom Grad n auftritt.
- Ein Polynom kann mehr Nullstellen haben, als sein Grad angibt. So hat das Polynom $X^2 + 1$ aufgrund der Beziehung⁴ $x^2 = 2 \operatorname{Re}(x)x - |x|^2$ die Nullstellenmenge $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = 0, |z| = 1\}$. Das kubische Polynom $X^2\mathbf{i}X\mathbf{i} + \mathbf{i}X^2\mathbf{i}X - \mathbf{i}X\mathbf{i}X^2 - X\mathbf{i}X^2\mathbf{i}$ wird sogar von ganz \mathbb{H} annulliert⁵.
- iii) Die Matrixmultiplikation in $\operatorname{Mat}(n; \mathbb{H})$ nach den üblichen Regeln ist wohldefiniert; allerdings spricht man von *Links*- und *Rechts*-Eigenwerten und -Vektoren. Beispielsweise ist λ ein rechts-Eigenwert, wenn $A\mathbf{x} = \mathbf{x}\lambda$.
- iv) Naiv lässt sich keine Determinantenabbildung definieren. Versucht man:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(2; \mathbb{H}), \quad \det(A) := ad - bc,$$

so gilt $\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{pmatrix} = \mathbf{i}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{i} = 2\mathbf{k} \neq 0$, was für eine Determinantenabbildung nicht sinnvoll ist.

3. Quaternionische Möbiustransformationen

Im diesem Abschnitt definieren wir analog zu Abschnitt 1 Möbiustransformationen, deren Koeffizientenkörper sowie Definitions-, Wertebereich die Quaternionen sind. Die Definitionen und Herleitungen basieren auf [2].

Definition 3.1. Eine (*generelle*) *quaternionische Möbiustransformation* ist eine Abbildung $f : \mathbb{H} \setminus \{-c^{-1}d\} \rightarrow \mathbb{H}$ der Form $f(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{H}$.

³Vergleiche [3, S. 168] für einen intuitiven Ansatz, Polynome mit Koeffizienten in \mathbb{H} darzustellen; eine behutsame, algebraische Konstruktion des Polynomringes, die sich um diverse Feinheiten kümmert, findet sich in der Einführung von [4].

⁴Siehe [3, S. 162, (3)]

⁵Siehe [3, S. 165]

Die Abbildung ist für $z = -c^{-1}d \iff cz+d = 0$ nicht definiert, was uns aber nicht weiter kümmern soll, da wir im weiteren Verlauf eine Einschränkung betrachten werden. Aber es tun sich bereits am Anfang weitere Schwierigkeiten auf: Schon die Fixpunktgleichung

$$z = (az + b)(cz + d)^{-1} \iff zcz + zd - az - b = 0$$

ist nicht trivial lösbar (siehe Abschnitt 3.4). Außerdem fehlt aufgrund der fehlenden Determinantenabbildung auch eine Definition von der Gruppe der invertierbaren Matrizen mit Einträgen aus \mathbb{H} . Um diesen Problemen zu begegnen, schränken wir die Betrachtung auf Möbiustransformationen ein, die ein Automorphismus der abgeschlossenen Einheitskugel $\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \leq 1\}$ sind. Deren Klassifizierung anhand ihrer Koeffizienten wird den Rest der Arbeit ausmachen.

3.1. Konstruktion von $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$, $\text{PU}(1,1; \mathbb{H})$ und dessen Wirkung

In diesem Abschnitt formulieren wir die Bedingungen, denen eine quaternionische Möbiustransformation genügen muss, damit eine Einschränkung ein Automorphismus auf $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$ ist. Die Beziehungen (3.1) werden im gesamten Abschnitt an vielen Stellen (auch implizit) eingesetzt werden, um Gleichungen zu vereinfachen.

Definition 3.2. Der Vektorraum $\mathbb{H}^{1,1}$ ist der Links- \mathbb{H} -Vektorraum \mathbb{H}^2 , auf dem ein Skalarprodukt durch die Hermitesche Form

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \bar{\mathbf{w}}^t J \mathbf{z} = \bar{w}_1 z_1 - \bar{w}_2 z_2$$

gegeben ist, wobei $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^t$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^t$ ist, außerdem $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Eine *unitäre Transformation* G ist ein linearer Automorphismus von $\mathbb{H}^{1,1}$, so dass $\langle G\mathbf{z}, G\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{H}$. Die unitären Transformationen bilden eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung und diese *Gruppe der unitären Transformationen* wird mit $\text{U}(1,1; \mathbb{H})$ bezeichnet. Die *projektive Gruppe der unitären Transformationen* ist $\text{PU}(1,1; \mathbb{H}) = \text{U}(1,1; \mathbb{H}) / \pm I$.

Lemma 3.1. Für ein $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2; \mathbb{H})$ gilt $G \in \text{U}(1,1; \mathbb{H})$ genau dann, wenn für die Koeffizienten die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$|a| = |d|, \quad |b| = |c|, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1, \quad \bar{a}b = \bar{c}d, \quad a\bar{c} = b\bar{d}. \quad (3.1)$$

Beweis. G ist nach Definition genau dann eine unitäre Transformation, wenn

$$\bar{\mathbf{w}}^t J \mathbf{z} = \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \langle G\mathbf{z}, G\mathbf{w} \rangle = \bar{\mathbf{w}}^t \bar{G}^t J G \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{H},$$

also genau dann, wenn $J = \overline{G}^t JG$ ist, was äquivalent zu $G^{-1} = J^{-1} \overline{G}^t J$ ist. Ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Natürlich gilt $GG^{-1} = I = G^{-1}G$. Multipliziert man nun (3.2) einmal links und einmal rechts mit G , erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} - b\bar{b} & -a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} - d\bar{b} & -c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}a - \bar{c}c & \bar{a}b - \bar{c}d \\ -\bar{b}a + \bar{d}c & -\bar{b}b + \bar{d}d \end{pmatrix}.$$

Ein Vergleich der Einträge liefert nun mit $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ das folgende Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 = |a|^2 - |b|^2 & \text{(i)} \\ b\bar{d} = a\bar{c} & \text{(ii)} \\ c\bar{a} = d\bar{b} & \text{(iii)} \\ 1 = |d|^2 - |c|^2 & \text{(iv)} \\ 1 = |a|^2 - |c|^2 & \text{(v)} \\ \bar{a}b = \bar{c}d & \text{(vi)} \\ \bar{b}a = \bar{d}c & \text{(vii)} \\ 1 = |d|^2 - |b|^2 & \text{(viii)} \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (ii) und (iii) sowie (vi) und (vii) sind äquivalent aufgrund der Beziehung $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$. Subtraktion von (i) und (v) liefert $|b| = |c|$; Subtraktion von (iv) und (v) liefert $|a| = |d|$. Einsetzen dieser beiden Gleichungen erbringt, dass (viii) äquivalent zu (v) ist. \square

Bemerkung. Ein analoges Resultat erhält man im Komplexen direkt aus (3.2): $G \in \text{U}(1,1; \mathbb{C})$ genau dann, wenn $b = \bar{c}$ und $d = \bar{a}$. Anschaulich betrachtet lassen Matrizen aus $\text{U}(1,1; \mathbb{C})$ die Einheitskreisscheibe fest.

Bemerkung. Fordert man für eine quaternionische Möbiustransformation g die Bedingungen (3.1) an die Koeffizienten, so ist die Einschränkung $g|_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}$, $z \mapsto (az + b)(cz + d)^{-1}$ wohldefiniert: Wäre nämlich $cz + d = 0$, so würde wegen (3.1) speziell $|z| = \frac{|d|}{|c|} > 1$ gelten, ein Widerspruch.

Satz 3.2. Für eine Möbiustransformation $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}$, $z \mapsto (az + b)(cz + d)^{-1}$, gilt $g(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$ genau dann, wenn die Koeffizienten a, b, c und d die Bedingungen (3.1) erfüllen. Die Gruppe von Möbiustransformationen $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ bezüglich der Hintereinanderausführung \circ ist isomorph zu $\text{PU}(1,1; \mathbb{H})$.

Beweis. Sei $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}$ mit $z \mapsto (az + b)(cz + d)^{-1}$ eine quaternionische Möbiustransformation.

Schritt 1: $g(\overline{\mathbb{B}}) = \overline{\mathbb{B}}$ genau dann, wenn (3.1) gilt.

Dafür konstruieren wir zunächst ein Modell für \mathbb{B} wie folgt aus $V := \mathbb{H}^{1,1}$. Definiere:

$$\begin{aligned} V_0 &:= \{\mathbf{z} \in V - \{0\} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0\} \\ V_- &:= \{\mathbf{z} \in V \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0\} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in V_-$ genau dann, wenn $|z_1| < |z_2|$ ist. Außerdem gilt $z_2 \neq 0$ für alle $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in V_- \cup V_0$.

Durch die Projektion $P : V_- \cup V_0 \longrightarrow \mathbb{H}$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2^{-1}$, kann nun $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$ identifiziert werden mit $P(V_-)$. (Die Abbildung $P : V_- \longrightarrow \mathbb{B}$ ist allerdings nicht injektiv.) Analog identifiziert man $\partial\mathbb{B} = P(V_0)$.

Sei nun $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2; \mathbb{H})$. Dann sieht $G\mathbf{z}$ unter P wie folgt aus:

$$\begin{aligned} P(G\mathbf{z}) &= P \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix} \\ &= (az_1 + bz_2)(cz_1 + dz_2)^{-1} \\ &= (az_1 z_2^{-1} + b)z_2 z_2^{-1} (cz_1 z_2^{-1} + d)^{-1} \\ &= (az + b)(cz + d)^{-1} \end{aligned}$$

Also wirkt G unter der Projektion P auf $V_- \cup V_0$ wie die Möbiustransformation g auf $\overline{\mathbb{B}}$. Nach Definition ist $G(V_- \cup V_0) = V_- \cup V_0$, wenn $G \in \text{U}(1,1; \mathbb{H})$. Mit Hilfe einer Cayley-Abbildung kann man Theorem 1 (b) aus [6] übertragen und zeigen: Lässt G die Menge $V_- \cup V_0$ invariant, dann ist $G \in \text{U}(1,1; \mathbb{H})$, und somit lässt G nach Lemma 3.1 $V_- \cup V_0$ genau dann invariant, wenn die Koeffizienten a, b, c und d die Bedingung (3.1) erfüllen. Insgesamt ergibt sich die Behauptung, dass $g(\overline{\mathbb{B}}) = \overline{\mathbb{B}}$ genau dann, wenn eben diese Bedingung gilt.

Schritt 2: Die Menge der Möbiustransformationen, die $\overline{\mathbb{B}}$ invariant lassen, ist bezüglich der Hintereinanderausführung \circ eine Gruppe und als solche isomorph zu $\text{PU}(1,1; \mathbb{H})$.

Seien $g(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$ und $h(z) = (a'z + b')(c'z + d')^{-1}$ quaternionische Möbiustransformationen, die $\overline{\mathbb{B}}$ invariant lassen. Mit

$$\begin{aligned} (g \circ h)(z) &= (a(a'z + b')(c'z + d')^{-1} + b)(c(a'z + b')(c'z + d')^{-1} + d)^{-1} \\ &= (a(a'z + b')(c'z + d')^{-1} + b)(c'z + d')(c'z + d')^{-1} (c(a'z + b')(c'z + d')^{-1} + d)^{-1} \\ &= (a(a'z + b') + b(c'z + d'))(c(a'z + b') + d(c'z + d'))^{-1} \\ &= ((aa' + bc')z + (ab' + bd'))((ca' + dc')z + (cb' + dd'))^{-1} \end{aligned}$$

findet sich analog zum Beweis im Komplexen (siehe Satz 1.1) ein surjektiver Gruppenhomomorphismus nach $\text{PU}(1,1;\mathbb{H})$ mit Kern $\pm I$. \square

3.2. Einfache und zusammengesetzte quaternionische Möbiustransformationen

Ist eine Möbiustransformation „einfach“, dann können wir sie mit Techniken aus Abschnitt 1 untersuchen. Dafür entwickeln wir in diesem Abschnitt ein *Einfachheitskriterium* (Satz 3.4).

Definition 3.3. Ein Element $G \in \text{PU}(1,1;\mathbb{H})$ bzw. die zugehörige Möbiustransformation heißt *einfach*, wenn G konjugiert zu einem Element $\tilde{G} \in \text{PU}(1,1;\mathbb{C})$ ist. Andernfalls wird G als *zusammengesetzt*⁶ bezeichnet.

Lemma 3.3 (Quaternionen sind konjugiert zu komplexen Zahlen). *Sei $z \in \mathbb{H}$ beliebig. Dann existiert eine Einheitsquaternion $q \in \partial\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$, so dass $q^{-1}zq \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ liegt.*

Beweis. Das Lemma ergibt sich prinzipiell schon aus der Rechenregel iv) von S. 11. Eine explizite Darstellung für q findet sich in [1, S. 332, Lemma 4]. Es sei angemerkt, dass für Einheitsquaternionen gilt: $q^{-1} = \bar{q}$. \square

Satz 3.4 (Einfachheitskriterium). *$G \in \text{PU}(1,1;\mathbb{H})$ ist genau dann einfach, wenn $b = \bar{c}$ und $\text{Re}(a) = \text{Re}(d)$. Einfachheit ist eine konjugationsinvariante Eigenschaft.*

Beweis. Schritt 1: Die geforderten Eigenschaften sind invariant unter Konjugation in $\text{PU}(1,1;\mathbb{H})$:

Seien $Q = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PU}(1,1;\mathbb{H})$ mit $b = \bar{c}$ und $\text{Re}(a) = \text{Re}(d)$. Wir rechnen $QQGQ^{-1}$ explizit aus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}' & -\bar{c}' \\ -\bar{b}' & \bar{d}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\bar{a}' - \bar{c}b' & -a\bar{c}' + \bar{c}d' \\ \bar{c}a' - \bar{d}b' & -c\bar{c}' + d\bar{d}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'a\bar{a}' - a'\bar{c}b' + b'\bar{c}a' - b'd\bar{b}' & -a'a\bar{c}' + a'\bar{c}d' - b'c\bar{c}' + b'd\bar{d}' \\ c'a\bar{a}' - c'\bar{c}b' + d'\bar{c}a' - d'd\bar{b}' & -c'a\bar{c}' + c'\bar{c}d' - d'c\bar{c}' + d'd\bar{d}' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

⁶Der Begriff *zusammengesetzt* leitet sich davon ab, dass man zeigen kann, dass eine zusammengesetzte quaternionische Möbiustransformation als Hintereinanderschaltung zweier einfacher dargestellt werden kann.

Betrachtet man nun

$$\begin{aligned} b^* - \bar{c}^* &= -a'ac' + a'\bar{c}\bar{d}' - b'c\bar{c}' + b'd\bar{d}' - \overline{c'a\bar{a}' - c'\bar{c}\bar{b}' + d'\bar{c}\bar{a}' - d'\bar{d}\bar{b}'} \\ &= -a'ac' + a'\bar{c}\bar{d}' - b'c\bar{c}' + b'd\bar{d}' - a'\bar{a}\bar{c}' + b'c\bar{c}' - a'\bar{c}\bar{d}' + b'\bar{d}\bar{d}' \\ &= -a'(a + \bar{a})c' + b'(d + \bar{d})\bar{d}', \end{aligned}$$

ist wegen $a + \bar{a} = 2 \operatorname{Re}(a) = 2 \operatorname{Re}(d) = d + \bar{d}$ und der wegen (3.1) geltenden Beziehung $a'\bar{c}' = b'\bar{d}'$ klar, dass $b^* = \bar{c}^*$ gilt.

Betrachtet man die Realteile von a^* und d^* , so fällt auf, dass die beiden mittleren Terme sich annullieren wegen $a'\bar{c}\bar{b}' = \bar{b}'\bar{c}\bar{a}'$ und $c'\bar{c}\bar{d}' = \bar{d}'\bar{c}\bar{c}'$, und weil natürlich $\operatorname{Re}(\cdot) = \operatorname{Re}(\bar{\cdot})$ gilt. Es gilt Rechenregel ii) und iv) von S. 11, so dass man

$$\begin{aligned} a'a\bar{a}' &= |a'|^2 \cdot a'a\bar{a}'|a'|^{-2} = |a'|^2 \cdot a'a(a')^{-1}, \\ d'd\bar{d}' &= |d'|^2 \cdot d'd\bar{d}'|d'|^{-2} = |d'|^2 \cdot d'd(d')^{-1} \end{aligned}$$

umformen kann.⁷ Die Abbildung $\operatorname{Re}(\cdot)$ ist natürlich \mathbb{R} -linear. Somit bleibt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a^*) &= \operatorname{Re}(a'a\bar{a}') - \operatorname{Re}(b'd\bar{b}') = |a'|^2 \operatorname{Re}(a) - |b'|^2 \operatorname{Re}(d) = \operatorname{Re}(a) \quad \text{und} \\ \operatorname{Re}(d^*) &= \operatorname{Re}(d'd\bar{d}') - \operatorname{Re}(c'a\bar{c}') = |d'|^2 \operatorname{Re}(d) - |c'|^2 \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d). \end{aligned}$$

Schritt 2: G ist konjugiert zu einem $\tilde{G} \in \operatorname{PU}(1,1; \mathbb{C}) \iff b = \bar{c}$ und $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d)$.

„ \Rightarrow “: Nach der Bemerkung auf S. 14 ist $G \in \operatorname{PU}(1,1; \mathbb{C})$ genau dann, wenn $b = \bar{c}$ und $a = \bar{d}$. Dies ist eine stärkere Forderung als $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d)$.

„ \Leftarrow “: **Fall 1:** $b = c = 0$

Dann sind a und d ähnlich, so dass eine Einheitsquaternion $q \in \partial\mathbb{B}$ existiert mit $qa\bar{q} = \bar{d}$.⁸ In zwei Schritten kann G nun zu einem $\tilde{G} \in \operatorname{PU}(1,1; \mathbb{C})$ überführt werden:

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\bar{q} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa\bar{q} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von Lemma 3.3 existiert eine Einheitsquaternion $q' \in \partial\mathbb{B}$, so dass $q'd\bar{q}' \in \mathbb{C}$ ist. Konjugation der obigen Gleichung mit $q'I$ liefert ein Element in $\operatorname{PU}(1,1; \mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} q' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}' & 0 \\ 0 & \bar{q}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}\bar{q}' & 0 \\ 0 & d\bar{q}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'\bar{d}\bar{q}' & 0 \\ 0 & q'd\bar{q}' \end{pmatrix}.$$

⁷ a' und d' sind ungleich Null, weil die Bedingungen (3.1) gelten. Somit sind $|a'|^{-2}$ und $|d'|^{-2}$ wohldefiniert. Falls $b' = \bar{c}' \neq 0$ gilt, kann man die Terme $b'd\bar{b}'$ und $c'a\bar{c}'$ analog umformen. Aber auch im Falle $b' = \bar{c}' = 0$ gilt die postulierte Gleichung.

⁸ Dieser Zusammenhang leuchtet ein, wenn man sich vor Augen hält, dass eine Quaternion d wegen $|d| = |\bar{d}|$ und $\operatorname{Re}(d) = \operatorname{Re}(\bar{d})$ immer ähnlich zu ihrer konjugierten Form \bar{d} ist. Siehe Rechenregel iv) auf S. 11.

Fall 2: $b = \bar{c} \neq 0$

Analog zum ersten Fall läuft die Überführung in zwei Schritten ab:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c|c|^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}|c|^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c|c|^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\bar{c}|c|^{-1} & \bar{c} \\ |c| & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ca\bar{c}|c|^{-2} & |c| \\ |c| & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & |c| \\ |c| & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der letzte Teil der Gleichung ergibt sich aus $ca\bar{c}|c|^{-2} = cb\bar{d}|c|^{-2} = c\bar{c}\bar{d}|c|^{-2} = \bar{d}$. Wieder existiert eine geeignete Einheitsquaternion q , so dass $qd\bar{q}$ in \mathbb{C} liegt. Somit liegt

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & |c| \\ |c| & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q} & 0 \\ 0 & \bar{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}\bar{q} & |c|\bar{q} \\ |c|\bar{q} & d\bar{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\bar{d}\bar{q} & q|c|\bar{q} \\ q|c|\bar{q} & qd\bar{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\bar{d}\bar{q} & |c| \\ |c| & qd\bar{q} \end{pmatrix}$$

in $\text{PU}(1,1; \mathbb{C})$. □

3.3. Die Aufteilung in *elliptisch*, *parabolisch* und *loxodromisch*

Wir müssen nun eine Definition der drei die Dynamik beschreibenden Eigenschaften einer Möbiustransformation finden, die kompatibel zu der im Komplexen eingesetzten, anschaulich motivierten Definition von S. 4 ist.

Definition 3.4. Es sei $g \neq \text{id}$ eine quaternionische Möbiustransformation, die $\bar{\mathbb{B}}$ invariant lässt.

- i) g heißt *elliptisch*, wenn sie mindestens einen Fixpunkt in \mathbb{B} hat.
- ii) g heißt *parabolisch*, wenn sie genau einen Fixpunkt hat, und dieser in $\partial\mathbb{B}$ liegt.
- iii) g heißt *loxodromisch*, wenn sie genau zwei Fixpunkte hat, und diese in $\partial\mathbb{B}$ liegen.

Bemerkung (Kompatibilität der Definition im Komplexen). Es ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, dass diese Definition 3.4 kompatibel zu der anschaulich motivierten Definition 1.4 von S. 4 im Komplexen ist. Fassen wir $\text{PU}(1,1; \mathbb{C}) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ auf, dann hat ein Element G die Form

$$G = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \det(G) = |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Im Falle $c \neq 0$ vereinfacht sich die Fixpunktformel (1.1) zu

$$\xi_{\pm} = \frac{\text{Im}(a)\mathbf{i} \pm \sqrt{\text{Re}(a)^2 - 1}}{c},$$

außerdem ist $\text{Tr}^2 G = (a + \bar{a})^2 = 4 \text{Re}(a)^2$, so dass wir eine Fallunterscheidung für $\text{Re}(a)^2$ betrachten können:

- i) Sei G parabolisch im Sinne von 3.4. Dann hat G genau einem Fixpunkt, also muss $\operatorname{Re}(a)^2 = 1$ gelten, und somit ist wegen $\operatorname{Tr}^2 G = 4$ und aufgrund des Klassifikationssatzes 1.5 die Möbiustransformation G auch im Sinne der Definition 1.4 parabolisch.
- ii) Sei G loxodromisch im Sinne 3.4. Weil beide Fixpunkte in $\partial\mathbb{B}$ liegen, muss der Betrag des Zählers gleich sein für beide Fälle \pm , und somit muss entweder $\operatorname{Im}(a) = 0$ sein oder $\sqrt{\operatorname{Re}(a)^2 - 1}$ orthogonal auf $\mathbb{R}\mathbf{i}$ stehen. Die erste Bedingung impliziert $|a| = \operatorname{Re}(a)$, so dass wegen $1 = |a|^2 - |c|^2$ und $a \neq 1$ die Relation $\operatorname{Re}(a)^2 > 1$ gelten muss; die zweite Bedingung ist gleichbedeutend mit $\operatorname{Re}(a)^2 > 1$. Insgesamt ist $\operatorname{Tr}^2 G > 4$ und somit ist G loxodromisch im Sinne von 1.4.
- iii) Sei G elliptisch im Sinne von 3.4. Dann existiert ein Fixpunkt in \mathbb{B} , also liegt o. B. d. A. der Fixpunkt ξ_+ in \mathbb{B} . Damit gilt

$$\left| \operatorname{Im}(a)\mathbf{i} + \sqrt{\operatorname{Re}(a)^2 - 1} \right|^2 < |c|^2 = |a|^2 - 1 = \operatorname{Re}(a)^2 + \operatorname{Im}(a)^2 - 1.$$

Das ist für $\operatorname{Re}(a)^2 \geq 1$ offensichtlich ein Widerspruch, und somit gilt $\operatorname{Tr}^2 G < 4$ und G ist elliptisch bezüglich 1.4.

Im Falle $c = 0$ ist $\operatorname{Re}(a)^2 + \operatorname{Im}(a)^2 = 1$ und wegen $a \neq \pm 1$ muss $\operatorname{Re}(a)^2 < 1$ gelten. Der einzige Fixpunkt liegt bei 0.

Bemerkung (Historischer Kontext). Diese Klassifikation anhand Anzahl und Position der Fixpunkte wird von allen einschlägigen Quellen als gegeben vorausgesetzt, jedoch immer ohne Motivation. Der Klassifikation vorausgehend sind lange Diskussionen, ob das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie durch die anderen Axiome bedingt wird. Diese Frage kann spätestens mit der Entdeckung der hyperbolischen Geometrie 1826 mit Nein beantwortet werden. Die Begriffe *elliptisch*, *parabolisch* und *hyperbolisch* beschreiben ursprünglich, wie sich parallele Geraden im Unendlichen verhalten: Die Eigenschaft *parabolisch* bezeichnet dabei den Spezialfall, der mit der euklidischen Geometrie übereinstimmt.

Die erste Formulierung, die Abbildungen durch diese Eigenschaften charakterisiert, findet sich bereits 1879 bei Felix Klein [7, §8, S. 122]. Dort untersucht er die Transformationen der oberen Halbebene, die ein Modell für die Poincaré-Scheibe ist (ähnlich der Konstruktion $P : V_- \cup V_0 \longrightarrow \overline{\mathbb{B}}$ von oben).

Beachten wir hier nur die bei einer solchen [Möbius-]Transformation festbleibenden Elemente [Fixpunkte]. Sie können conjugiert imaginär, zusammenfallend, oder reell und verschieden sein. Im ersten Falle will ich die Substitution eine *elliptische*, im zweiten Falle einen *parabolische*, im dritten eine *hyperbolische* nennen.

Die Eigenschaft *loxodromisch* taucht nicht auf. Allerdings merkt [2, S. 351] an, dass *hyperbolisch* eine andere Bezeichnung für *einfach und loxodromisch* ist.

3.4. Fixpunkte und Eigenwerte

In diesem Abschnitt formulieren wir die zentrale Gleichung, deren Lösung mit drei Fallunterscheidungen den Rest der Arbeit ausmachen werden.

Im Folgenden sei $g(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$ eine quaternionische Möbiustransformation, die $\overline{\mathbb{B}}$ invariant lässt, sowie $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PU}(1,1; \mathbb{H})$ die dazugehörige Matrix. Offensichtlich ist $\mathfrak{z} \in \mathbb{H}$ ein Fixpunkt von g genau dann, wenn

$$g(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} \iff \mathfrak{z}c\mathfrak{z} + \mathfrak{z}d - a\mathfrak{z} - b = 0 \quad (3.3)$$

ist. Unser Ziel ist es zunächst, Fixpunkte von g mit Rechts-Eigenwerten⁹ von G in Verbindungen zu setzen.

Lemma 3.5. *Wenn \mathfrak{z} ein Fixpunkt von g ist, dann ist $\mathfrak{t} = c\mathfrak{z} + d$ ein Rechts-Eigenwert von G .*

Beweis. Wendet man G auf den Vektor $\begin{pmatrix} \mathfrak{z} \\ 1 \end{pmatrix}$ an, und verwendet die aus (3.3) resultierende Gleichung $\mathfrak{z}c\mathfrak{z} + \mathfrak{z}d = a\mathfrak{z} + b$, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathfrak{z} + b \\ c\mathfrak{z} + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{z}c\mathfrak{z} + \mathfrak{z}d \\ c\mathfrak{z} + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{z} \\ 1 \end{pmatrix} (c\mathfrak{z} + d). \quad \square$$

Bemerkung (Eigenschaften von Rechts-Eigenwerten).

- i) Rechts-Eigenwerte sind invariant unter Konjugation: Sei $G\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\mathfrak{t}$. Dann gilt für ein $H \in \text{PU}(1,1; \mathbb{H})$: $(HGH^{-1})(H\mathfrak{z}) = HG\mathfrak{z} = (H\mathfrak{z})\mathfrak{t}$.
- ii) Ist \mathfrak{t} ein Rechts-Eigenwert von G , dann sind es auch alle in der Ähnlichkeitsklasse von \mathfrak{t} liegenden Quaternionen: Sei $q \neq 0$ eine Quaternion, und $G\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\mathfrak{t}$, dann ist $G(\mathfrak{z}q) = G\mathfrak{z}q = \mathfrak{z}\mathfrak{t}q = (\mathfrak{z}q)(q^{-1}\mathfrak{t}q)$.

Behauptung 3.6 (Zentrale Fixpunktgleichung). *Sei $g(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$ mit $c \neq 0$ eine $\overline{\mathbb{B}}$ erhaltende Möbiustransformation. Dann sind die Fixpunkte von g gegeben durch alle $\mathfrak{z} = c^{-1}(\mathfrak{t} - d) \in \overline{\mathbb{B}}$, so dass \mathfrak{t} eine Lösung von*

$$\mathfrak{t}^2 - (d + \overline{c^{-1}bd})\mathfrak{t} + \overline{c^{-1}b} = 0 \quad (3.4)$$

ist.

⁹Im Folgenden werden immer nur Rechts-Eigenwerte betrachtet. Während deren Existenz schon lange bekannt war, führten die Links-Eigenwerte viele Jahrzehnte lang ein Schattendasein. Erst 1985 konnte Wood mit Hilfe topologischer Methoden überhaupt zeigen, dass jede Matrix aus $\text{Mat}(n; \mathbb{H})$ Links-Eigenwerte besitzt [5]. Diese explizit zu berechnen für $n \geq 4$ ist Gegenstand aktueller Forschung.

Beweis. Die Formel ergibt sich aus (3.3), indem zunächst $z = c^{-1}(t - d)$ substituiert und zusammengefasst wird:

$$\begin{aligned} 0 &= zcz + zd - az - b \\ &= c^{-1}(t - d)cc^{-1}(t - d) + c^{-1}(t - d)d - ac^{-1}(t - d) - b \\ &= c^{-1}(t^2 - td - dt + d^2) + c^{-1}td - c^{-1}d^2 - ac^{-1}t + ac^{-1}d - b \\ &= c^{-1}t^2 - c^{-1}dt - ac^{-1}t + ac^{-1}d - b. \end{aligned}$$

Multiplikation auf der linken Seite mit c liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - dt - cac^{-1}t + cac^{-1}d - cb \\ &= t^2 - (d + cac^{-1})t + cac^{-1}d - cb \end{aligned}$$

Der nicht von t abhängende Term $cac^{-1}d - cb$ lässt sich nun noch vereinfachen, weil die Bedingungen (3.1) gelten:

$$cac^{-1} = |c|^{-2}ca\bar{c} = \bar{c}^{-1}a\bar{c} = \bar{c}^{-1}b\bar{d} \quad \text{und} \quad cb = \bar{c}^{-1}b|c|^2,$$

und wegen $|d|^2 - |c|^2 = 1$ gilt:

$$cac^{-1}d - cb = \bar{c}^{-1}b\bar{d}d - \bar{c}^{-1}b|c|^2 = \bar{c}^{-1}b|d|^2 - \bar{c}^{-1}b|c|^2 = \bar{c}^{-1}b(|d|^2 - |c|^2) = \bar{c}^{-1}b.$$

Insgesamt ergibt sich die postulierte Formel. □

Aufgrund dieses Satzes können wir uns nun mit drei Fällen befassen und dezidiert die Klassifikation und Fixpunkte berechnen: Entweder ist $b = c = 0$, oder aber $\bar{c}^{-1}b$ ist entweder 1 oder nicht trivial anzugeben.

3.4.1. Der Fall $b = c = 0$

Satz 3.7 (Klassifikationssatz, Teil 1). *Sei $g(z) = azd^{-1}$, so dass (3.1) gilt. Dann ist g elliptisch, und für die Fixpunktmenge \mathcal{F} gilt:*

- i) *Wenn $\operatorname{Re}(a) \neq \operatorname{Re}(d)$, dann ist g zusammengesetzt und hat einen einzigen Fixpunkt: $\mathcal{F} = \{0\}$.*
- ii) *Wenn $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d)$, dann ist g einfach und hat eine reell-zweidimensionale Fixpunktmenge $\mathcal{F} = \{qz \in \overline{\mathbb{B}} \mid qdq^{-1} = a, z \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d\}$.*

Beweis. Die Fixpunktgleichung $zd = az$ hat in jedem Fall die Lösung $z = 0$. Also ist g elliptisch. Die Klassifizierung in *einfach* und *zusammengesetzt* ist offensichtlich nach Satz 3.4.

- i) Seien $\operatorname{Re}(a) \neq \operatorname{Re}(d)$, $\mathfrak{z} \neq 0$. Dann können a und d nicht ähnlich sein, und die Fixpunktgleichung $a = \mathfrak{z}d\mathfrak{z}^{-1}$ besitzt keine Lösung.
- ii) Es existiert eine Quaternion q , so dass $qdq^{-1} = a$ ist. Nach [3, S. 165] ist $\mathfrak{z}d = d\mathfrak{z}$ genau dann, wenn \mathfrak{z} in der zu \mathbb{C} isomorphen Unter algebra $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d$ liegt. \square

3.4.2. Der Fall $b = \bar{c} \neq 0$

Satz 3.8 (Klassifikationssatz, Teil 2). *Sei $g(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$ mit $b = \bar{c} \neq 0$, so dass (3.1) gilt. Dann ist g einfach, und für die Fixpunktmenge \mathcal{F} gilt:*

- i) Wenn $\operatorname{Re}(d)^2 < 1$, dann ist g elliptisch und besitzt die Fixpunkte $\mathcal{F} = \{v \in \bar{\mathbb{B}} \mid v = \bar{c}^{-1}(t - d)\}$, wobei $t \in \{\operatorname{Re}(d) + \sqrt{1 - \operatorname{Re}(d)^2}q \mid q \in \partial\mathbb{B}, \operatorname{Re}(q) = 0\}$.
- ii) Wenn $\operatorname{Re}(d)^2 = 1$, dann ist g parabolisch, und die Fixpunktmenge aus i) fällt auf einen Punkt $\mathcal{F} = \{-\bar{c}^{-1} \operatorname{Im}(d)\} \subset \partial\mathbb{B}$ zusammen.
- iii) Wenn $\operatorname{Re}(d)^2 > 1$, dann ist g loxodromisch und die Fixpunkte liegen bei $\mathcal{F} = \{v \in \bar{\mathbb{B}} \mid v = \bar{c}^{-1}(t - d), t = \operatorname{Re}(d) \pm \sqrt{\operatorname{Re}(d)^2 - 1}\}$.

Beweis. Aufgrund der Beziehungen (3.1) und $b = \bar{c}$ wissen wir, dass $a = \bar{b}\bar{c}^{-1} = \bar{c}\bar{c}^{-1}$, und somit $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(\bar{d}) = \operatorname{Re}(d)$. Also ist g einfach. Sei $\tilde{G} = (\tilde{g}_{ij}) \in \operatorname{PU}(1,1; \mathbb{C})$ konjugiert zu G . Der Realteil von d ist invariant unter Konjugation, und es gilt $\operatorname{Tr}^2(G) = \operatorname{Tr}^2(\tilde{G}) = (\tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{22})^2 = 4\operatorname{Re}(d)^2$, weil $\tilde{g}_{11} = \overline{\tilde{g}_{22}}$ sein muss nach der Bemerkung von S. 14. Die Klassifikation ist dann offensichtlich nach Satz 1.5. (Siehe auch die Bemerkung zur Kompatibilität der Definitionen auf S. 18.)

Die Fixpunktgleichung (3.4) vereinfacht sich für $b = \bar{c} \neq 0$ zu:

$$t^2 - (d + \bar{d})t + 1 = 0 \iff (t - \operatorname{Re}(d))^2 = \operatorname{Re}(d)^2 - 1.$$

Im Fall $\operatorname{Re}(d)^2 \leq 1$ ist wegen der Bemerkung Teil ii) auf S. 12 die Nullstellenmenge von $(t - \operatorname{Re}(d))^2 + (1 - \operatorname{Re}(d)^2)$ genau die Menge der Quaternionen mit Länge $\sqrt{1 - \operatorname{Re}(d)^2}$ und Realanteil 0.

Im Falle $\operatorname{Re}(d)^2 = 1$ fällt diese Menge auf einen Punkt zusammen, und es gilt $t = \operatorname{Re}(d)$.

Für $\operatorname{Re}(d)^2 > 1$ ist $(t - \operatorname{Re}(d))^2$ reell und ≥ 0 . Somit gilt aufgrund der Beziehung $x^2 = 2\operatorname{Re}(x)x - |x|^2$: $2\operatorname{Re}(t - \operatorname{Re}(d))(t - \operatorname{Re}(d))$ ist reell und ≥ 0 . Also muss schon $t - \operatorname{Re}(d)$ reell sein, und die (reelle) quadratische Gleichung besitzt die Lösungen $t = \operatorname{Re}(d) \pm \sqrt{\operatorname{Re}(d)^2 - 1}$. \square

3.4.3. Der Fall $b \neq \bar{c} \neq 0$

Nach der Bemerkung von S. 20 wissen wir, dass jeder Repräsentant der Ähnlichkeitsklasse eines Rechts-Eigenwertes auch ein Rechts-Eigenwert ist. Aus Sicht einer Möbiustransformation bleibt also die Ähnlichkeitsklasse invariant, die eindeutig charakterisierbar ist durch Realanteil und Norm eines jeden Repräsentanten.

Behauptung 3.9 (Umformulierung der zentralen Fixpunktgleichung). *Die Gleichung (3.4) ist äquivalent zu*

$$t = (p - T)^{-1}(q - N), \quad (3.5)$$

mit $p = d + \bar{c}^{-1}b\bar{d}$, $q = \bar{c}^{-1}b$, sowie $T = t + \bar{t}$ und $N = t\bar{t}$.

Beweis. Zunächst sei angemerkt, dass $T = t + \bar{t} = 2 \operatorname{Re}(t) \in \mathbb{R}$ und $N = t\bar{t} = |t|^2 \in \mathbb{R}$ gilt. Diese beiden Werte sind invariant unter Konjugation, und charakterisieren bereits vollständig eine Äquivalenzklasse von zueinander ähnlichen Quaternionen.

Die Variablen p und q sind lediglich Kurzschreibweisen für die Koeffizienten, so dass sich (3.4) als $0 = t^2 - pt + q$ schreiben lässt. Über q wissen wir, dass für den Absolutbetrag aufgrund von (3.1) gilt: $|q| = 1$, aber $q \neq 1$ wegen $b \neq \bar{c}$.

Für alle $t \in \mathbb{H}$ gilt: $t^2 - Tt + N = t^2 - t^2 - \bar{t}t + t\bar{t} = 0$. Durch „Addition einer Null“ wird (3.4) somit zu

$$0 = (t^2 - pt + q) - (t^2 - Tt + N) = -(p - T)t + (q - N),$$

und weil q nicht reell und somit $q - N \neq 0$ ist, muss wegen $t \neq 0$ auch $p - T \neq 0$ gelten, und es ergibt sich die postulierte Formel:

$$t = (p - T)^{-1}(q - N). \quad \square$$

Lemma 3.10. *Es gilt: $p\bar{q} + q\bar{p} = p + \bar{p}$.*

Beweis. Diese Beziehung lässt sich direkt nachrechnen. Man beachte die Regel $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$.

$$\begin{aligned} p\bar{q} + q\bar{p} &= (d + \bar{c}^{-1}b\bar{d})\overline{\bar{c}^{-1}b} + \bar{c}^{-1}b\overline{(d + \bar{c}^{-1}b\bar{d})} \\ &= d\bar{b}\bar{c}^{-1} + \bar{c}^{-1}b\bar{d}\bar{b}\bar{c}^{-1} + \bar{c}^{-1}b\bar{d} + \bar{c}^{-1}b\bar{d}\bar{b}\bar{c}^{-1} \\ &= d\bar{b}\bar{c}^{-1} + \bar{c}^{-1}b\bar{d} + \bar{c}^{-1}b(d + \bar{d})\bar{b}\bar{c}^{-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} d\bar{b}\bar{c}^{-1} + \bar{c}^{-1}b\bar{d} + d + \bar{d} \\ &= p + \bar{p} \end{aligned}$$

Die Gleichheit (*) gilt, weil $d + \bar{d}$ reell ist und deswegen mit den anderen Variablen kommutiert. Außerdem gilt $|c| = |b|$, und daher:

$$\bar{c}^{-1}b(d + \bar{d})\bar{b}c^{-1} = (d + \bar{d})|c|^{-2}cb\bar{b}c^{-1} = (d + \bar{d})|c|^{-2}|b|^2cc^{-1} = d + \bar{d}. \quad \square$$

Lemma 3.11 (Vorbereitungen auf den Klassifikationssatz, Teil 3a). *Die Werte T und N genügen der Gleichung $(N - 1)(T - 2\operatorname{Re}(p)N + NT) = 0$.*

Beweis. Setzt man (3.5) für die Beziehungen $T = t + \bar{t}$ und $N = t\bar{t}$ ein, ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} T &= t + \bar{t} = (p - T)^{-1}(q - N) + \overline{(p - T)^{-1}(q - N)} \\ &= t + \bar{t} = (p - T)^{-1}(q - N) + (\bar{q} - N)(\bar{p} - T)^{-1} \\ N &= t\bar{t} = (p - T)^{-1}(q - N)\overline{(p - T)^{-1}(q - N)} \\ &= (p - T)^{-1}(q - N)(\bar{q} - N)(\bar{p} - T)^{-1} \end{cases}$$

Umformen dieser (reellen) Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} \stackrel{(1)}{\iff} & \begin{cases} (p - T)T(\bar{p} - T) = (q - N)(\bar{p} - T) + (p - T)(\bar{q} - N) \\ (p - T)N(\bar{p} - T) = (q - N)(\bar{p} - T) \end{cases} \\ \stackrel{(2)}{\iff} & \begin{cases} |p|^2T - pT^2 - \bar{p}T^2 + T^3 = q\bar{p} - qT - N\bar{p} + NT + p\bar{q} - pN - \bar{q}T + TN \\ |p|^2N - pNT - \bar{p}NT + T^2N = q\bar{q} - qN - \bar{q}N + N^2 \end{cases} \\ \stackrel{(3)}{\iff} & \begin{cases} |p|^2T - 2\operatorname{Re}(p)T^2 + T^3 = 2\operatorname{Re}(p) - 2\operatorname{Re}(q)T - 2\operatorname{Re}(p)N + 2NT \\ |p|^2N - 2\operatorname{Re}(p)NT + NT^2 = 1 - 2\operatorname{Re}(q)N + N^2 \end{cases} \\ \stackrel{(4)}{\iff} & \begin{cases} T^3 - 2\operatorname{Re}(p)T^2 + T\operatorname{Re}(p)^2 - T\operatorname{Re}(p)^2 + |p|^2T - 2T + 2\operatorname{Re}(q)T = \\ \quad = 2\operatorname{Re}(p) - 2\operatorname{Re}(p)N + 2NT - 2T \\ N\operatorname{Re}(p)^2 - 2\operatorname{Re}(p)NT + NT^2 + |p|^2N + 2\operatorname{Re}(q)N - N\operatorname{Re}(p)^2 - 2N = \\ \quad = N^2 - 2N + 1 \end{cases} \\ \stackrel{(5)}{\iff} & \begin{cases} T(T - \operatorname{Re}(p))^2 + T\Delta = 2(N - 1)(T - \operatorname{Re}(p)) \\ N(T - \operatorname{Re}(p))^2 + N\Delta = (N - 1)^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

In Schritt (1) wird links mit $p - T$ und rechts mit $\bar{p} - T$ multipliziert. Schritte (2) und (3) sind Ausmultiplikation und Zusammenfassen von Ausdrücken unter Verwendung von $x + \bar{x} = 2\operatorname{Re}(x)$. In Schritt (3) wird außerdem die in Lemma 3.10 gezeigte Gleichung $p\bar{q} + q\bar{p} = p + \bar{p} = 2\operatorname{Re}(p)$ und $|q| = 1$ eingesetzt. In Schritt (4) werden lediglich „Nullen addiert“, damit in Schritt (5) unter Verwendung von $\Delta := |p|^2 - \operatorname{Re}(p)^2 - 2 + 2\operatorname{Re}(q)$ zusammengefasst werden kann.

In den Klassifikationssätzen 3.12 und 3.13 wird Δ ähnlich einer Diskriminante verwendet werden. Daher schon jetzt die Beobachtung, dass

$$\Delta = |\operatorname{Im}(p)|^2 - |q - 1|^2 \quad (3.7)$$

gilt:

$$\begin{aligned} \Delta &= |p|^2 - \operatorname{Re}(p)^2 - 2 + 2 \operatorname{Re}(q) \\ &= |\operatorname{Im}(p)|^2 - |q| - 1 + 2 \operatorname{Re}(q) \\ &= |\operatorname{Im}(p)|^2 - \operatorname{Re}(q)^2 - |\operatorname{Im}(q)|^2 - 1 + 2 \operatorname{Re}(q) \\ &= |\operatorname{Im}(p)|^2 - (\operatorname{Re}(q) - 1)^2 - |\operatorname{Im}(q)|^2 \\ &= |\operatorname{Im}(p)|^2 - \operatorname{Re}(q - 1)^2 - |\operatorname{Im}(q - 1)|^2 \\ &= |\operatorname{Im}(p)|^2 - |q - 1|^2 \end{aligned}$$

Durch Umstellen der beiden Gleichungen (3.6) nach $TN\Delta$ und Gleichsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= 2N(N - 1)(T - \operatorname{Re}(p)) - T(N - 1)^2 \\ &= (N - 1)(2N(T - \operatorname{Re}(p)) - TN + T) \\ &= (N - 1)(2NT - 2 \operatorname{Re}(p)N - TN + T) \\ &= (N - 1)(T - 2 \operatorname{Re}(p)N + NT), \end{aligned} \quad (3.8)$$

was die Behauptung war. \square

Satz 3.12 (Klassifikationssatz, Teil 3a). *Es sei $g(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$ eine Möbiustransformation, die $\overline{\mathbb{B}}$ invariant lässt, außerdem sei $b \neq \bar{c} \neq 0$. Definiere $\Delta := |\operatorname{Im}(\bar{c}^{-1}b\bar{d} + d)|^2 - |\bar{c}^{-1}b - 1|^2$. Dann ist die Fixpunktmenge \mathcal{F} gegeben durch alle Punkte $\mathfrak{z} = c^{-1}(t - d) \in \overline{\mathbb{B}}$, so dass t ein Rechts-Eigenwert ist und sich als $t = (p - T)^{-1}(q - N)$ schreiben lässt, wobei abhängig von Δ gelten muss:*

- i) Wenn $\Delta \leq 0$, dann $N = 1$ und $T = \operatorname{Re}(p) \pm \sqrt{-\Delta}$.
- ii) Wenn $\Delta > 0$, dann $N = X \pm \sqrt{X^2 - 1}$ und $T = \operatorname{Re}(p) \pm \sqrt{2X - 2 - \Delta}$, mit

$$X = \frac{1}{4} \left(\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta + \sqrt{(\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta - 4)^2 + 16\Delta} \right).$$

Beweis. Die Werte N und T müssen der in Lemma 3.11 geforderten Gleichung

$$(N - 1)(T - 2 \operatorname{Re}(p)N + NT) = 0$$

genügen. Wir betrachten eine Fallunterscheidung für N :

Fall 1: $N \neq 1$. Dann folgt aus (3.8), dass $T - 2\operatorname{Re}(p)N + NT = 0$ gilt, also $T = \frac{2\operatorname{Re}(p)N}{N+1}$. Einsetzen in die untere Gleichung von (3.6) und anschließendes Zusammenfassen liefert:

$$\begin{aligned} (N-1)^2 &= N(T - \operatorname{Re}(p))^2 + N\Delta \\ &= N\left(\frac{2\operatorname{Re}(p)N}{N+1} - \operatorname{Re}(p)\right)^2 + N\Delta \\ &= N\left(\frac{\operatorname{Re}(p)(N-1)}{N+1}\right)^2 + N\Delta \\ &= \frac{N\operatorname{Re}(p)^2(N-1)^2}{(N+1)^2} + N\Delta. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun beide Seiten mit $(N+1)^2$,

$$\begin{aligned} (N-1)^2(N+1)^2 &= N\operatorname{Re}(p)^2(N-1)^2 + N(N+1)^2\Delta \\ \iff N^4 - 2N^2 + 1 &= N^3\operatorname{Re}(p)^2 - 2N^2\operatorname{Re}(p)^2 + N\operatorname{Re}(p)^2 + N^3\Delta + 2N^2\Delta + N\Delta \end{aligned}$$

addiert $4N^2$ und dividiert dann durch N^2 , ergibt sich:

$$\left(N + \frac{1}{N}\right)^2 = (\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta) \left(N + \frac{1}{N}\right) - 2\operatorname{Re}(p)^2 + 2\Delta + 4.$$

Schreibt man $X := \frac{1}{2} \left(N + \frac{1}{N}\right)$, dann ist $N = X \pm \sqrt{X^2 - 1}$, und die obige Gleichung wird zu $4X^2 = (\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta) \cdot 2X - 2\operatorname{Re}(p)^2 + 2\Delta + 4$ und besitzt (weil $N \geq 0$, $N \neq 1$ gilt, und daher $X > 1$) die folgende Lösung für X :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4}(\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta) + \sqrt{\frac{1}{16}(\operatorname{Re}(p)^4 + 2\operatorname{Re}(p)^2\Delta + \Delta^2) - \frac{1}{16}(8\operatorname{Re}(p)^2 - 8\Delta - 16)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta + \sqrt{(\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta - 4)^2 + 16\Delta} \right). \end{aligned}$$

Formt man die untere Gleichung von (3.6) um, teilt durch N , und setzt $N + \frac{1}{N} = 2X$ ein, ergibt sich:

$$(T - \operatorname{Re}(p))^2 = \frac{1}{N}(N^2 - 2N + 1 - N\Delta) = N - 2 + \frac{1}{N} - \Delta = 2X - 2 - \Delta,$$

woraus sich die Lösung $T = \operatorname{Re}(p) \pm \sqrt{2X - 2 - \Delta}$ ablesen lässt.

Fall 2: $N = 1$. Einsetzen in (3.6) ergibt $(T - \operatorname{Re}(p))^2 = -\Delta$ und daher $T = \operatorname{Re}(d) \pm \sqrt{-\Delta}$.

Der Satz macht eine Fallunterscheidung bezüglich Δ . Im Falle $N = 1$ muss offensichtlich $\Delta \leq 0$ sein. Es gilt aber auch: Wenn $N \neq 1$ ist, dann muss $\Delta > 0$ sein, was im Folgenden gezeigt wird.

Angenommen $N \neq 1$ und $\Delta \leq 0$, dann muss $T - 2\operatorname{Re}(p)N + NT = 0$ gelten. Daraus folgt, dass die

Lösung t nicht reell ist, speziell einen Imaginärteil ungleich Null hat.

Angenommen, t wäre reell, also $N = t^2$ und $T = 2t$. Wir wissen, dass $t \neq 0$ ist, also gilt: $0 = T - 2 \operatorname{Re}(p)N + NT = 2t - 2t^2 \operatorname{Re}(p) + 2t^3 \iff 0 = 2t^2 - 2 \operatorname{Re}(p)t + 2$. Durch Subtraktion der Fixpunktgleichung (3.4) sowie der konjugierten Fixpunktgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= 2t^2 - 2 \operatorname{Re}(p)t + 2 \\ &= 2t^2 - 2 \operatorname{Re}(p)t + 2 - (t^2 - pt + q) - (t^2 - \bar{p}t + \bar{q}) \\ &= 2 - 2 \operatorname{Re}(q) \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, weil für $b \neq \bar{c}$ offensichtlich $q = \bar{c}^{-1}b \neq 1$, aber $|q| = 1$ ist.

Weil t also nicht reell ist, ist $N = |t|^2 > \operatorname{Re}(t)^2 = \frac{T^2}{4}$. Zusammen mit $(N + 1)^2 = 2N(X + 1)$ ergibt sich

$$\frac{T^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \operatorname{Re}(p)^2 N^2}{(N + 1)^2} = \frac{\operatorname{Re}(p)^2 N}{2(X + 1)} > \frac{1}{X + 1} \cdot \frac{T^2}{4} \cdot \frac{\operatorname{Re}(p)^2}{2},$$

also $X + 1 - \frac{\operatorname{Re}(p)^2}{2} > 0$. Weil wir $\Delta \leq 0$ annehmen, gilt:

$$\begin{aligned} 0 &< 4X + 4 - 2 \operatorname{Re}(p)^2 \\ &= -\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta + 4 + \sqrt{(\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta - 4)^2 + 16\Delta} \\ &= -\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta + 4 + \sqrt{(\operatorname{Re}(p)^2 - \Delta - 4)^2 - 16\Delta + 4 \operatorname{Re}(p)^2 \Delta + 16\Delta} \\ &= -\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta + 4 + \sqrt{(\operatorname{Re}(p)^2 - \Delta - 4)^2 + 4 \operatorname{Re}(p)^2 \Delta} \\ &\leq -\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta + 4 + |\operatorname{Re}(p)^2 - \Delta - 4| \end{aligned}$$

Diese Ungleichung impliziert¹⁰ $\operatorname{Re}(p)^2 - 4 < \Delta$. Analog findet sich mit $X > 1$:

$$\begin{aligned} 0 &< 4X - 4 = \operatorname{Re}(p)^2 + \Delta - 4 + \sqrt{(\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta - 4)^2 + 16\Delta} \\ &\leq \operatorname{Re}(p)^2 + \Delta - 4 + |\operatorname{Re}(p)^2 + \Delta - 4| \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Re}(p)^2 - 4 > -\Delta$. Insgesamt ergibt sich die Ungleichungskette

$$0 \leq -\Delta < \operatorname{Re}(p)^2 - 4 < \Delta \leq 0,$$

was ein Widerspruch ist. Für $N \neq 1$ muss also $\Delta > 0$ gelten. □

Satz 3.13 (Klassifikationssatz, Teil 3b). *Es seien g und Δ wie oben. Dann gilt: g ist zusammengesetzt, und abhängig von Δ gilt:*

i) Wenn $\Delta < 0$, dann ist g elliptisch,

¹⁰ $|A - B| > A - B \Rightarrow A - B < 0 \Rightarrow A < B$

ii) wenn $\Delta = 0$, dann ist g parabolisch, und

iii) wenn $\Delta > 0$, dann ist g loxodromisch.

Beweis. Nach dem Einfachheitskriterium (Satz 3.4) ist wegen $b \neq \bar{c}$ offensichtlich, dass g zusammengesetzt ist.

Der Beweis muss die Position der Fixpunkte bestimmen. Dabei reicht es aus, herauszufinden, ob der bzw. die Fixpunkte in \mathbb{B} oder $\partial\mathbb{B}$ liegen. Somit reicht es, zu berechnen, ob ein Fixpunkt den Betrag eins hat. Sei

$$\mathfrak{z} = \bar{c}^{-1}(t - d) = \bar{c}^{-1}((p - T)^{-1}(q - N) - d) = \bar{c}^{-1}(p - T)^{-1}((q - N) - (p - T)d)$$

ein Fixpunkt von g . Dann gilt:

$$\begin{aligned} D &= (|\mathfrak{z}|^2 - 1)|c|^2|p - T|^2 = |(q - N) - (p - T)d|^2 - |c|^2|p - T|^2 \\ &\stackrel{(1)}{=} |q - N|^2 - (q - N)\bar{d}(\bar{p} - T) - (p - T)d(\bar{q} - N) + (|d|^2 - |c|^2)|p - T|^2 \\ &\stackrel{(2)}{=} N|p - T|^2 - (p - d - N\bar{d})(\bar{p} - T) - (p - T)(\bar{p} - \bar{d} - Nd) + |p - T|^2 \\ &\stackrel{(3)}{=} N|p|^2 - NpT - N\bar{p}T + NT^2 - (|p|^2 - d\bar{p} - N\bar{d}\bar{p} - pT + dT + \bar{d}NT) - \\ &\quad - (|p|^2 - p\bar{d} - pNd - T\bar{p} + T\bar{d} + TNd) + |p - T|^2 \\ &\stackrel{(4)}{=} N|p|^2 - 2\operatorname{Re}(p)NT + NT^2 - 2|p|^2 + (d\bar{p} + p\bar{d}) + N(\bar{d}\bar{p} + pd) + \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(p)T - 2\operatorname{Re}(d)T - 2\operatorname{Re}(d)NT + |p|^2 - 2\operatorname{Re}(p)T + T^2 \\ &\stackrel{(5)}{=} T^2 - 2\operatorname{Re}(p)NT + NT^2 - 2\operatorname{Re}(d)T - 4\operatorname{Re}(d)\operatorname{Re}(p)N - 2\operatorname{Re}(d)NT \\ &= (T - 2\operatorname{Re}(d))(T - 2\operatorname{Re}(p)N + NT) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Also ist $\mathfrak{z} \in \partial\mathbb{B}$ genau dann, wenn $D = 0$ gilt. Die Umformungen sind teilweise nicht ganz offensichtlich:

In Schritt (1) findet die folgende Formel zur Berechnung des Betrages der Differenz zweier Quaternionen x und y Anwendung:

$$|x - y|^2 = (x - y)\overline{(x - y)} = x\bar{x} - x\bar{y} - y\bar{x} + y\bar{y} = |x|^2 - x\bar{y} - y\bar{x} + |y|^2.$$

In Schritt (2) wird $|N| = N = (p - T)^{-1}(q - N)\overline{(p - T)^{-1}(q - N)}$ verwendet¹¹, um $|q - N|^2 = N|p - T|^2$ zu ersetzen. Außerdem gelten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (q - N)\bar{d} &= q\bar{d} - N\bar{d} = \bar{c}^{-1}b\bar{d} - N\bar{d} = p - d - N\bar{d} \quad \text{und} \\ d(\bar{q} - N) &= d\bar{q} - dN = d\bar{b}c^{-1} - dN = \bar{p} - \bar{d} - Nd. \end{aligned}$$

¹¹Es gilt immer: $N = \mathfrak{t}\bar{\mathfrak{t}} = |\mathfrak{t}|^2 \geq 0$.

Schritt (4) ist lediglich Ausmultiplikation sowie Auflösung von $|p - T|^2$ analog zu Schritt (1). In Schritt (5) schließlich heben sich diverse Summanden gegenseitig auf. Mit der Beziehung

$$\begin{aligned} |p|^2 &= |\bar{c}^{-1}b\bar{d} + d|^2 = |\bar{c}^{-1}b|^2|\bar{d}|^2 + \bar{c}^{-1}b\bar{d}d + d\bar{d}\bar{c}^{-1} + |d|^2 = 2|d|^2 + q\bar{d}^2 + d^2\bar{p} \\ &= (d + q\bar{d})\bar{d} + d(\bar{d} + d\bar{q}) = (d + \bar{c}^{-1}b\bar{d})\bar{d} + d(\bar{d} + d\bar{b}c^{-1}) = p\bar{d} + d\bar{p} \end{aligned}$$

löst sich $-2|p|^2 + |p|^2 + p\bar{d} + d\bar{p} = 0$ und

$$N|p|^2 + N(\bar{d}\bar{p} + pd) = N(\bar{d}\bar{p} + p\bar{d} + d\bar{p} + pd) = N((\bar{d} + d)\bar{p} + p(\bar{d} + d)) = 4N \operatorname{Re}(d) \operatorname{Re}(p)$$

auf.

In den Fällen ii) und iii) folgt aus $\Delta \geq 0$, dass es genau einen Fixpunkt (im Falle $\Delta = 0$) oder genau zwei Fixpunkte gibt. Aus dem Beweis von Satz 3.12 folgt, dass $T - 2 \operatorname{Re}(p)N + NT = 0$ wenn $\Delta > 0$. Falls $\Delta = 0$ gilt $N = 1$ und $T = \operatorname{Re}(p)$, und somit ist wieder $T - 2 \operatorname{Re}(p)N + NT = 0$. Also liegen die Fixpunkte in beiden Fällen in $\partial\mathbb{B}$.

Fall i) liefert einen Fixpunkt in \mathbb{B} : Das Vorzeichen von D bestimmt, ob z innerhalb oder außerhalb von \mathbb{B} liegt. (Der letztere Fall ist kein zulässiger Punkt der Möbiustransformation g , tritt aber als eine Lösung für die beiden Werte T auf.) Setzt man für die beiden Faktoren aus (3.9) die Werte für T und N ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} T - 2 \operatorname{Re}(p)N + NT &= 2T - 2 \operatorname{Re}(p) = \pm 2\sqrt{-\Delta} \\ T - 2 \operatorname{Re}(d) &= \operatorname{Re}(p) - 2 \operatorname{Re}(d) \pm \sqrt{-\Delta} = \operatorname{Re}(p - d - \bar{d}) \pm \sqrt{-\Delta} \\ &= \operatorname{Re}(\bar{c}^{-1}b\bar{d} - \bar{d}) \pm \sqrt{-\Delta} = \operatorname{Re}((q - 1)\bar{d}) \pm \sqrt{-\Delta} \end{aligned}$$

Für das Vorzeichen von D ist nur $|z|^2 - 1$ relevant. Betrachtet man D_{\pm} für die Lösungen z_{\pm} , die sich aus den Rechts-Eigenwerten t_{\pm} ergeben mit $N = 1$ und $T = \operatorname{Re}(p) \pm \sqrt{-\Delta}$, dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(D_+ \cdot D_-) &= \operatorname{sign}\left(\left(\operatorname{Re}((q - 1)\bar{d}) + \sqrt{-\Delta}\right) \cdot 2\sqrt{-\Delta} \cdot \left(\operatorname{Re}((q - 1)\bar{d}) - \sqrt{-\Delta}\right) \cdot (-2\sqrt{-\Delta})\right) \\ &= \operatorname{sign}(4\Delta) \operatorname{sign}(\operatorname{Re}((q - 1)\bar{d})^2 + \Delta) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} -\operatorname{sign}(\operatorname{Re}((q - 1)\bar{d})^2 + |\operatorname{Im}(p)|^2 - |q - 1|^2) \\ &= -\operatorname{sign}(\operatorname{Re}((q - 1)\bar{d})^2 + |\operatorname{Im}(\bar{c}^{-1}b\bar{d} + d)|^2 - |q - 1|^2) \\ &= -\operatorname{sign}(\operatorname{Re}((q - 1)\bar{d})^2 + |\operatorname{Im}(\bar{c}^{-1}b\bar{d} - \bar{d})|^2 - |q - 1|^2) \\ &= -\operatorname{sign}(|\bar{c}^{-1}b\bar{d} - \bar{d}|^2 - |q - 1|^2) \\ &= -\operatorname{sign}(|q - 1|^2|d|^2 - |q - 1|^2) \\ &= -\operatorname{sign}(|q - 1|^2(|d|^2 - 1)) \\ &= -\operatorname{sign}(|q - 1|^2|c|^2) = -1. \end{aligned}$$

Also hat genau eine der beiden Lösungen z_{\pm} einen Betrag < 1 und liegt daher in \mathbb{B} und damit ist g elliptisch. \square

Beispiel. Es sei $g(z) = ((1 - \mathbf{i})z + \mathbf{k})(\mathbf{j}z + 1 + \mathbf{i})^{-1}$. Dann gelten wegen

$$\overline{(1 - \mathbf{i})\mathbf{k}} = (1 + \mathbf{i})\mathbf{k} = \mathbf{k} + \mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{j} = \bar{\mathbf{j}}(1 + \mathbf{i}) \quad \text{und} \quad (1 - \mathbf{i})\bar{\mathbf{j}} = \mathbf{k} - \mathbf{j} = \mathbf{k} - \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{k}\overline{(1 + \mathbf{i})}$$

die Bedingungen (3.1) und somit $g(\bar{\mathbb{B}}) = \bar{\mathbb{B}}$. Wir können Satz 3.12 und 3.13 anwenden. Dafür berechnen wir zunächst die Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned} q &= \bar{\mathbf{j}}^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i} \\ p &= q\overline{(1 + \mathbf{i})} + 1 + \mathbf{i} = \mathbf{i}(1 - \mathbf{i}) + 1 + \mathbf{i} = \mathbf{i} - \mathbf{i}^2 + 1 + \mathbf{i} = 2(1 + \mathbf{i}) \\ \Delta &= |\operatorname{Im}(p)|^2 - |q - 1|^2 = 2^2 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Weil $\Delta = 2 > 0$ ist, wissen wir nach Satz 3.13, iii), dass g zusammengesetzt loxodromisch ist. Wir sind in Fall ii) von Satz 3.12 und erhalten

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4} \left(4 + 2 + \sqrt{(4 + 2 - 4)^2 + 16 \cdot 2} \right) = 3, \\ N &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 1} = 3 \pm 2\sqrt{2} \quad \text{und} \\ T &= 2 \pm \sqrt{6 - 2 - 2} = 2 \pm 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Somit können wir Rechts-Eigenwerte ausrechnen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &= (p - T)^{-1} (q - N) = \left(2\mathbf{i} \pm \sqrt{2} \right)^{-1} \left(\mathbf{i} - 3 \pm 2\sqrt{2} \right) \\ \mathfrak{t} &= \frac{1}{6} \left(-2\mathbf{i} \pm \sqrt{2} \right) \left(\mathbf{i} - 3 \pm \sqrt{2} \right) = \frac{1}{6} \left(6 + 6\mathbf{i} \mp 3\mathbf{i}\sqrt{2} \mp 3\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 + 2\mathbf{i} \mp \mathbf{i}\sqrt{2} \mp \sqrt{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{i}) \left(2 \mp \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden Fixpunkte in $\partial\mathbb{B}$:

$$z = -\mathbf{j} \left(\frac{1}{2} (1 + \mathbf{i}) \left(2 \mp \sqrt{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 (1 + \mathbf{i}) \right) = \pm \frac{\mathbf{j}\sqrt{2}}{2} (1 + \mathbf{i}) = \pm \frac{\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}.$$

A. Visualisierung invarianter Punktfolgen unter Möbiustransformationen

Für die Erstellung der Abbildungen 1.1 und 1.2 auf S. 10 wurde die Software *GnuPlot*¹² eingesetzt. Die Daten wurden mit dem folgenden Perl-Script erzeugt:

Listing 1: Perl-Programm `plot/invariant.pl`

```

0  #!/usr/bin/perl
   use strict;
   use warnings;
   use feature qw(:5.10);
   use Math::Complex;
   use Math::Complex qw(:pi Inf);
   use autodie;

10  open my $fh, "|_gnuplot_-persist";
   sub p($){ say $fh @_; }

   my $lambda = cplx(1.6, pi/6);
   # $lambda = cplx(1.2, pi/6);
   my $xiplus = cplx(-1,0);
   my $ximinus = cplx( 1,0);
   # $xiplus = cplx( 1,-1/2);
   # $ximinus = cplx(-1, 1/2);

   # g1 ist die Fixpunkttransformation
20  sub g1($){
   my $z = shift;
   return Inf if $z-1 == 0;
   return ($ximinus*$z-$xiplus)/($z-1);
   }

   p <<EOF;
   set key off # keine Legende anzeigen
   set grid xtics ytics
30  set xrange [-3:3]
   set yrange [-2:2]
   EOF

   p qq<set term pdf> if $ARGV[0] and $ARGV[0] eq '-e'; # export

   sub spiral {
   p("plot_" . join "_", @_ => (qq<"-" u 1:2 w l lc rgb "#444444">)x(scalar @_));
   foreach my $ofs (@_) {
   for my $t (-1000..1000) {
40     $t = $t/20; # Schrittweite kleiner machen
   my $z = cplx($lambda->abs**$t, $t * $lambda->arg + $ofs);
   my $fz = g1($z); # f(g1($z)) liefert das gleiche Resultat!
   p($fz->Re . "_" . $fz->Im) if $fz != Inf;
   }
   p("e");
   }
   }

   # Familie plotten
50  spiral( map { $_*pi/8 } 0..15 );

   close $fh;

```

¹²*GnuPlot* ist freie Software und zum Download unter <http://www.gnuplot.info/> verfügbar.

Literatur

- [1] BRENNER, J. L.: Matrices of quaternions. In: *Pacific J. Math.* 14 (1951), 329-335. <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1103052104>
 - [2] CAO, Wensheng ; PARKER, John R. ; WANG, Xiantao: On the classification of quaternionic Möbius transformations. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 137 (2004), Nr. 02, 349-361. <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004104007868>. – DOI 10.1017/S0305004104007868
 - [3] EBBINGHAUS, H.D. ; HERMES, H. ; HIRZEBRUCH, F. ; LAMOTKE, K.: *Zahlen*. Springer, 1992 (Springer-Lehrbuch). <http://books.google.com/books?id=c1jOfh4CxhoC>. – ISBN 9783540556541
 - [4] GORDON, B. ; MOTZKIN, T. S.: On the zeros of polynomials over division rings. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 116 (1965), 218-226. <http://www.ams.org/journals/tran/1965-116-00/S0002-9947-1965-0195853-2/S0002-9947-1965-0195853-2.pdf>
 - [5] HUANG, Liping ; SO, Wasin: On left eigenvalues of a quaternionic matrix. In: *Linear Algebra and its Applications* 323 (2001), Nr. 1–3, 105 - 116. [http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795\(00\)00246-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00246-9). – DOI 10.1016/S0024-3795(00)00246-9. – ISSN 0024-3795
 - [6] JAKOBS, Wencke ; KRIEG, Aloys: Möbius transformations on \mathbb{R}^3 . In: *Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal* 55 (2010), S. 375–383
 - [7] KLEIN, Felix: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. In: *Mathematische Annalen* 14 (1879), 111–172. http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684_0014
 - [8] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 2*. Springer, 2004 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 9783540203896
 - [9] MUMFORD, David ; SERIES, Caroline ; WRIGHT, David: *Indra's Pearls. The Vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, 2002. – ISBN 978-0-521-35253-6
 - [10] NEEDHAM, T.: *Anschauliche Funktionentheorie*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2001. – ISBN 978-3486245783
-